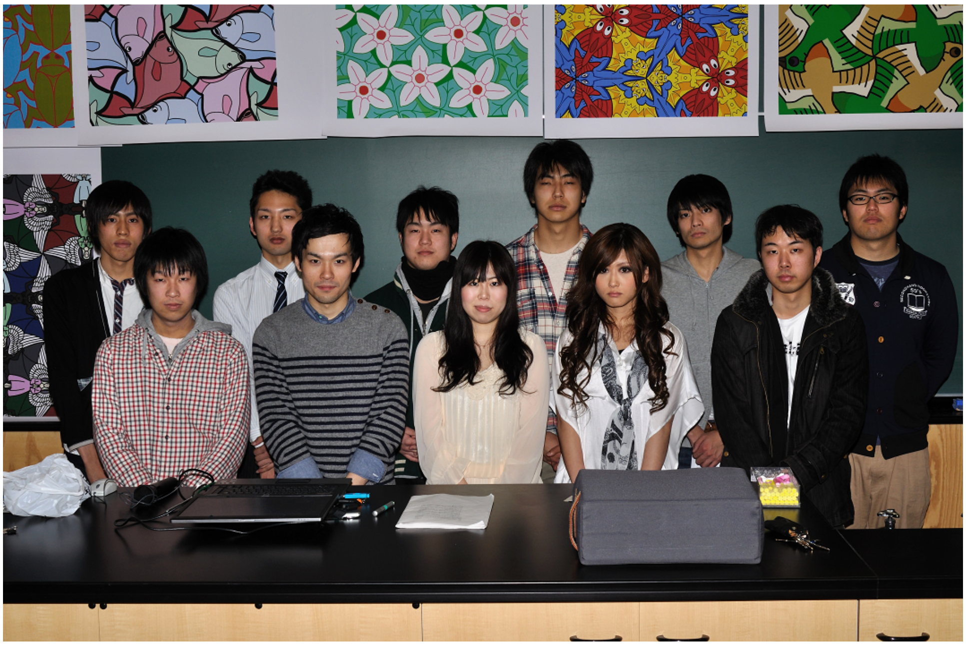
2011年度川崎ゼミ報告書

エッシャーの規則的文様



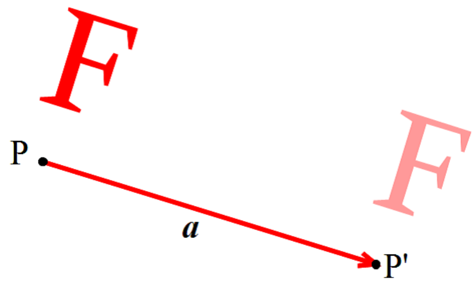
1　三角格子：「$p31m$」（金子浩之）

私たちはこの1年間、エッシャーの規則的文様の幾何的構造を研究してきました。

具体的な議論に入る前に、準備として、平面の合同変換（等長写像）の分類を述べます。合同変換は次の4種類に分けられます。

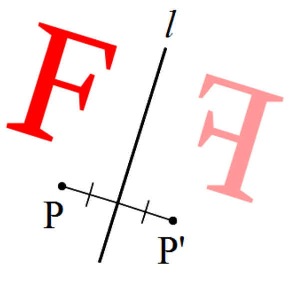
例　(1) **平行移動（並進）**

$\boldsymbol{a}$ を定ベクトルとするとき、点Pに対し、$\mathrm{P}+\boldsymbol{a}$ を対応させる写像を**平行移動**または**並進**という。$\boldsymbol{a}$ を**移動ベクトル**という。



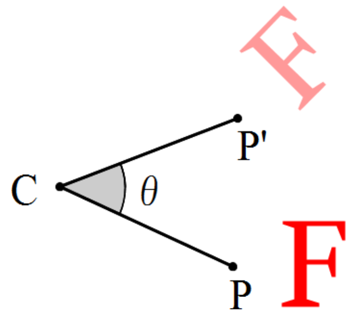
(2) **鏡映（線対称変換）**

l を定直線とするとき、点Pに対し、l が2点P、P′ の垂直二等分線となるような点P′ が定まる。PにP′ を対応させる写像を**鏡映**または**線対称変換**という。



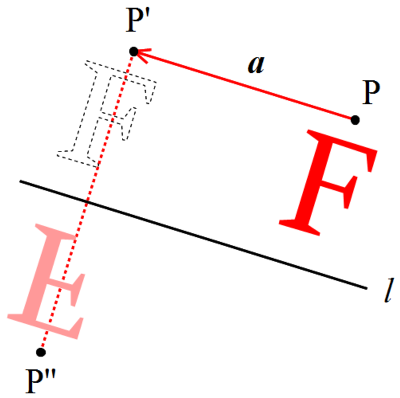
(3) **回転**

C を定点、θ を与えられた角度とするとき、点 P を C のまわりに θ だけ回 転させる変換を、写像を C を中心とする θ だけの**回転**という。回転行列 $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ により $\mathrm{P}' = \mathrm{C} + \mathrm{R}_\theta(\mathrm{P} - \mathrm{C})$ と表すことができる。



(4) **滑り鏡映(並進鏡映)**

l を定直線、$\boldsymbol{a}$ を l に平行な定ベクトルとするとき、$\boldsymbol{a}$ だけの平行移動と、l に関する鏡映を続けて行う変換を**滑り鏡映**または**並進鏡映**という。



続いて、規則的文様を定義します。

定義　平面の部分集合の族 $\{F_i\}$ が**規則的文様**であるとは、次を満たすものとする。

(1) すべての F_i は合同である。すなわち、各 F_i 、F_j に対し、平面の合同変換 g で、$g(F_i) = F_j$ となるものが存在する。

(2) そのような合同変換 g は模様全体を変えない。$\{g(F_i)\} = \{F_i\}$ である。すなわち各 F_k に対し、 $g(F_k) = F_l$ となる F_l が存在し、各 F_l に対し、$g(F_k) = F_l$ となる F_k が存在する。

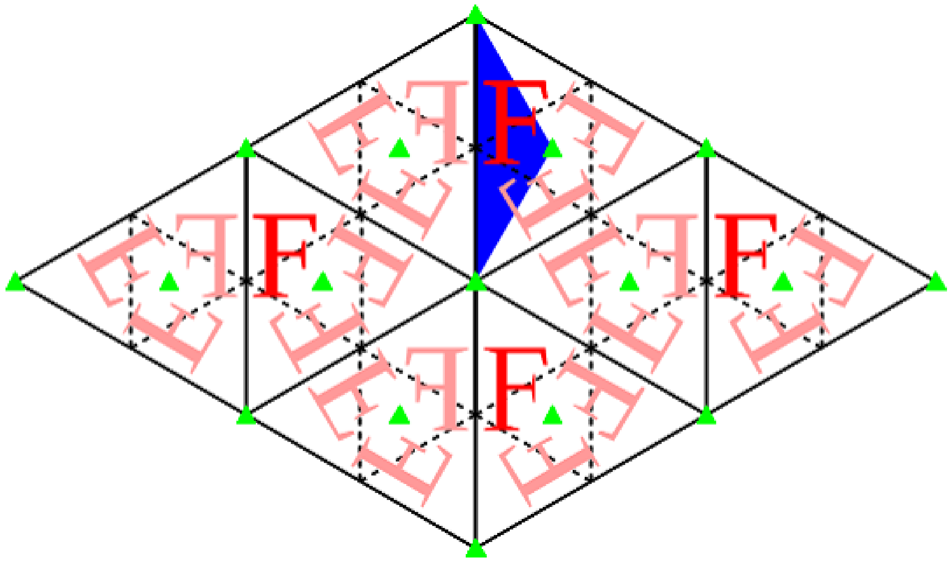
以下では、さらに、F_i には対称性がないものとします。すなわち、自明でない合同変換 g で $g(F_i) = F_i$ となるものは存在しないと仮定します。

そのとき、規則的文様 $\{F_i\}$ の一つの F_i を選び、F_0 とおくとき、任意の F_j に対し、$g_j(F_0) = F_j$ となる合同変換 g_j がちょうど一つ定まります。これらの g_j の全体 $G = \{g_j\}$ は群になることが分かります。

G は文様そのものでなく、同じ単位文様の現れるパターンを表しています。F_0 を別の単位模様 F' に変えても $\{g(F') \mid g \in G\}$ は規則的文様になることも多いです。

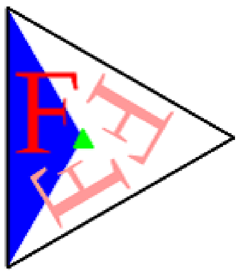
G が 2 つの 1 次独立なベクトルによる平行移動を含むとき、**壁紙群**といいます。壁紙群は 17 種類に分類されることが知られています。

その一つである $p31m$ という壁紙群を紹介します。

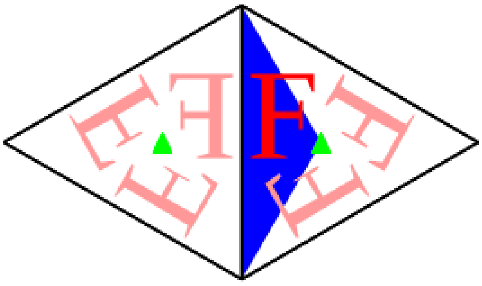


ここで、実線は鏡映軸、点線は滑り鏡映軸、三角形は $\frac{2\pi}{3}$ 回転中心を表します。上の条件 (1)、(2) を満たすことは明らかではありませんが、確かめることはできます。

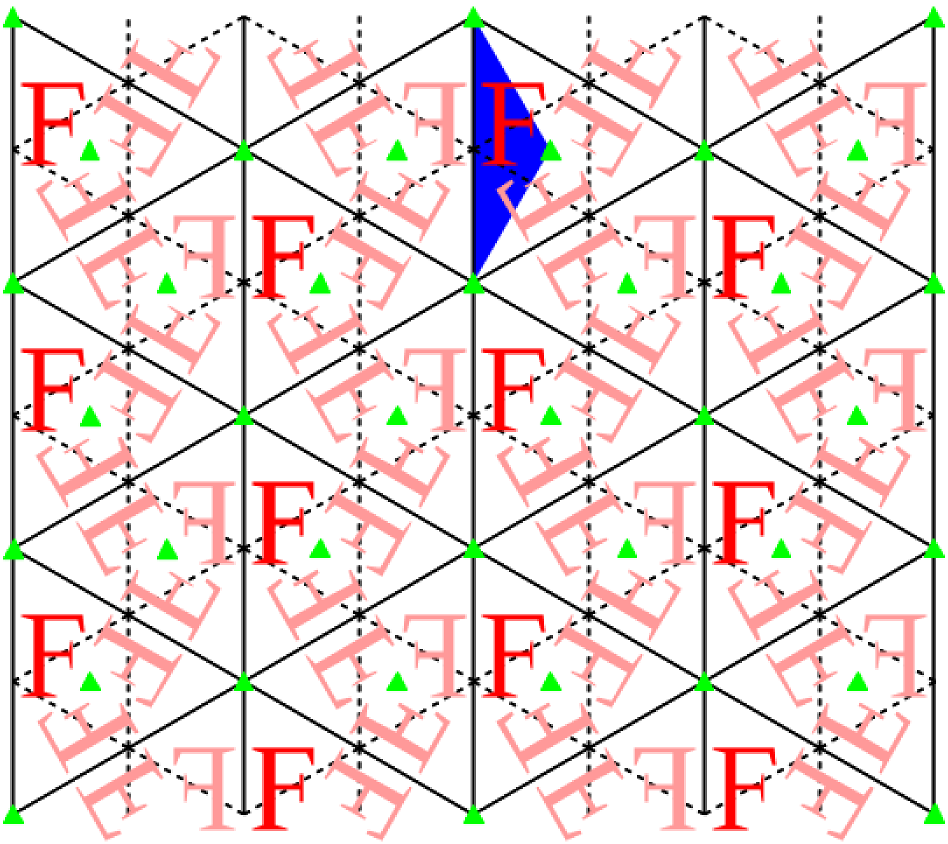
$p31m$ 文様を単位文様から構成しましょう。正三角形の中に単位文様 F を描き、重心を中心に $\frac{2\pi}{3}$ 回転、$\frac{4\pi}{3}$ 回転します。



正三角形の 1 辺に関して鏡映をします。



菱形の領域を平行移動により、コピーしてつなげれば $p31m$ 文様が完成します。このとき、正三角形の各辺は文様全体の鏡映軸になります。また、正三角形の重心のみならず、各頂点も文様全体の $\frac{2\pi}{3}$ 回転中心になります。さらに、鏡映軸は等間隔の平行線になりますが、その周期の半周期分の位置に滑り鏡映軸が存在することが分かります。

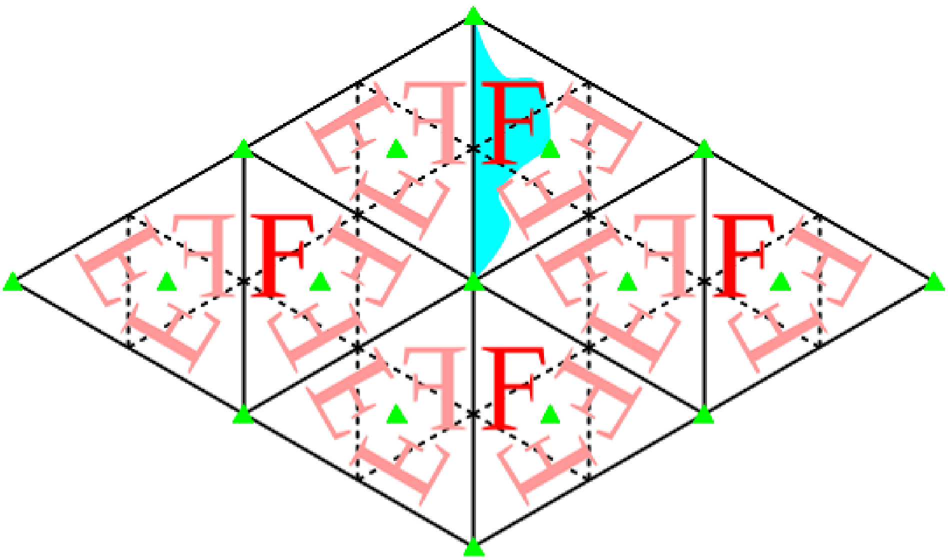


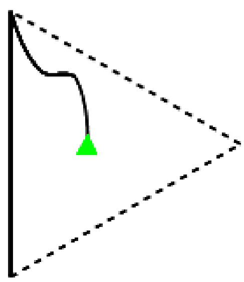
平面の領域 D で壁紙群 G の作用で平面全体を覆うものを考えます。

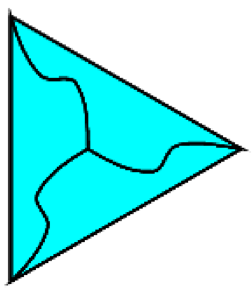
$$\bigcup_{g \in G} g(D) = \mathbb{R}^2$$

そのようなもののうち、極小のものを**基本領域**といいます。$p31m$ の図で、青く塗ってある部分がその例です。$\dfrac{2\pi}{3}$ 回転をすれば正三角形を覆い、鏡映により菱形を覆い、平行移動で平面全体を覆います。

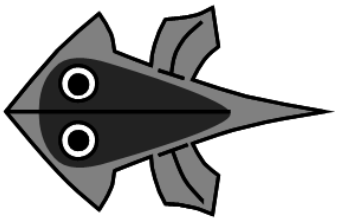
基本領域の選び方には自由度があります。青い二等辺三角形の底辺は動かせませんが、斜辺、すなわち、正三角形の重心と頂点を結ぶ曲線はある程度自由に選ぶことができます。下図はその例を示しています。実際、$\dfrac{2\pi}{3}$ 回転をして、正三角形を覆うことができます。

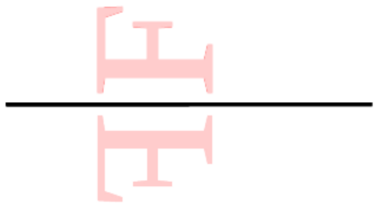




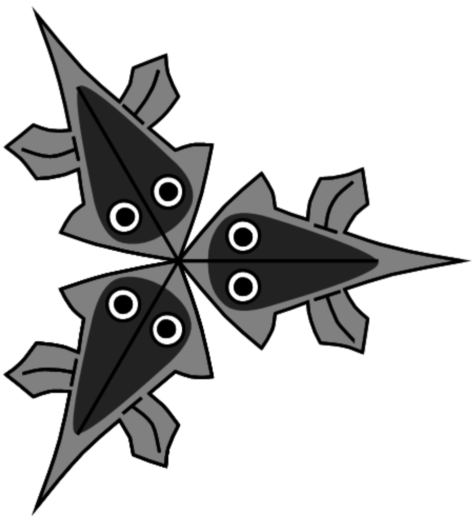


　このような基本領域を、鏡映で動かし、線対称な領域をエッシャータイルとすることができます。F2 つ分として次のような魚の形を選ぶことができます。

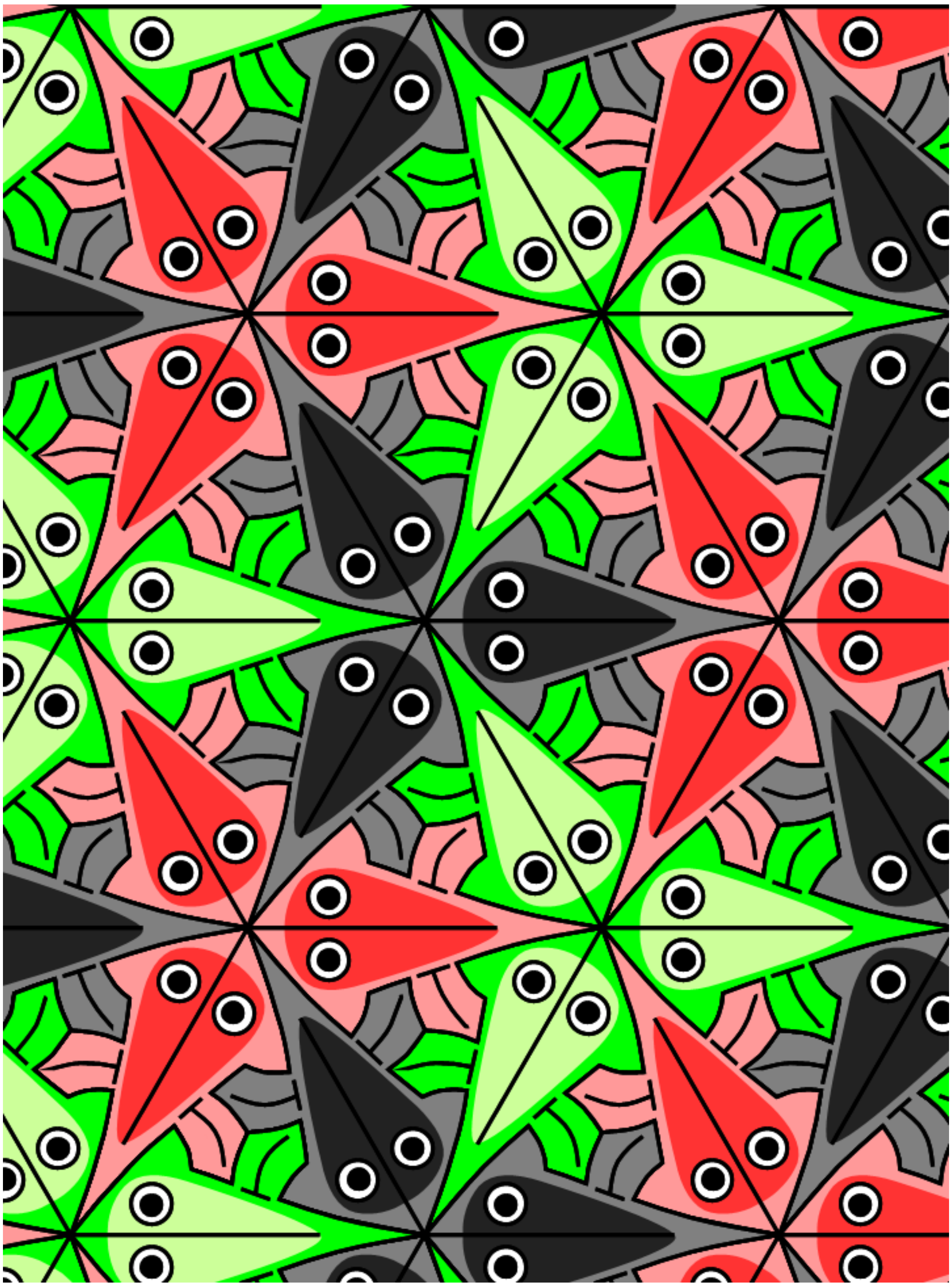




$\dfrac{2\pi}{3}$ 回転をすると次の形になります。



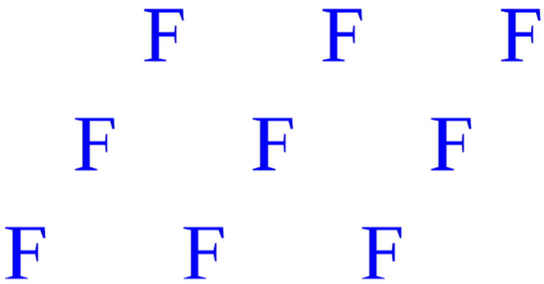
平行移動してエッシャー文様をつくることができます。

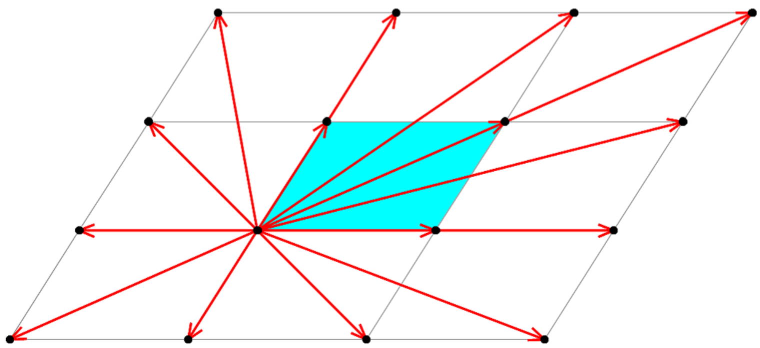


2　一般格子：「$p2$」（坂井伸成）

壁紙群の分類の基本的概念としての格子について説明します。

規則的文様が与えられたとき、同じ向きのＦだけ集めると、それらはすべて平行移動で移り合います。それらの平行移動の移動ベクトル全体を**格子**といいます。





格子も一種の壁紙群で、その基本領域は平行四辺形です。2 辺を a、b、頂角を α とおきます。その形により、格子を 5 つのタイプに分けます。

(1) 基本領域が一般の平行四辺形のとき、**一般格子**という。

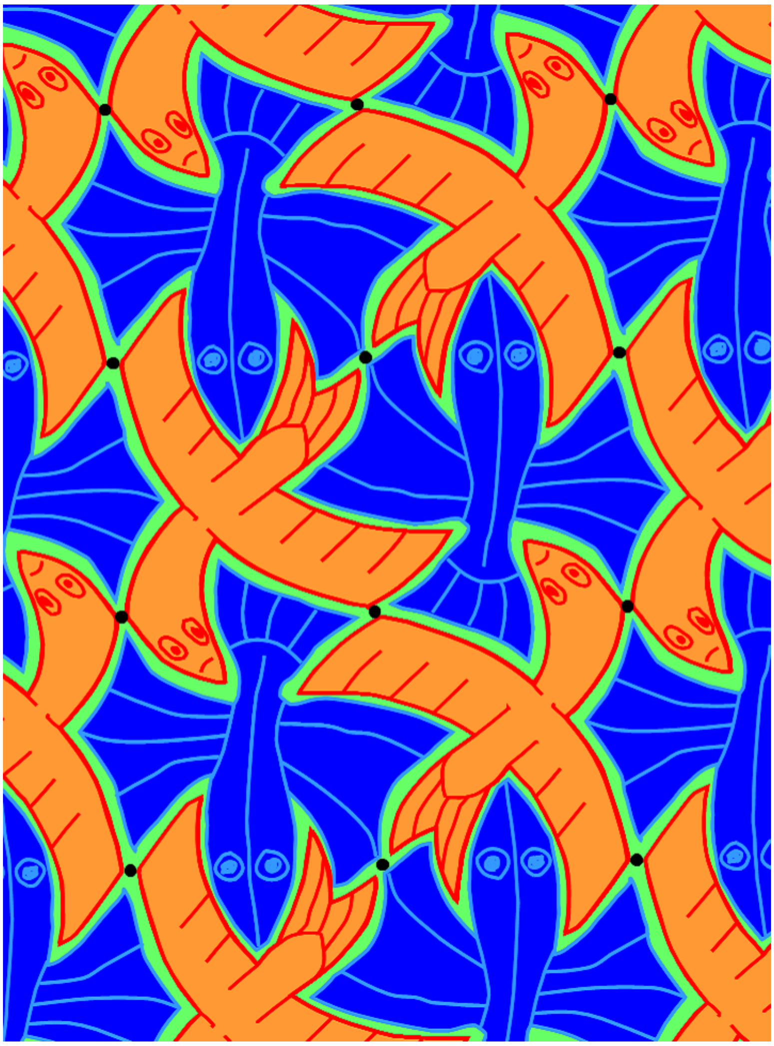
(2) 基本領域が長方形のとき $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{2}\right)$、**長方格子**という。

(3) 基本領域が正方形のとき $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{2},\ a = b\right)$、**正方格子**という。

(4) 基本領域が菱形のとき $(a = b)$、**菱形格子**という。

(5) 基本領域が 2 つの正三角形を合わせた菱形のとき $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{3},\ a = b\right)$、**三角格子**という。

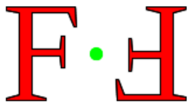
一般格子による平行移動と点対称移動を含む壁紙群 $p2$ をもつエッシャー文様があります。



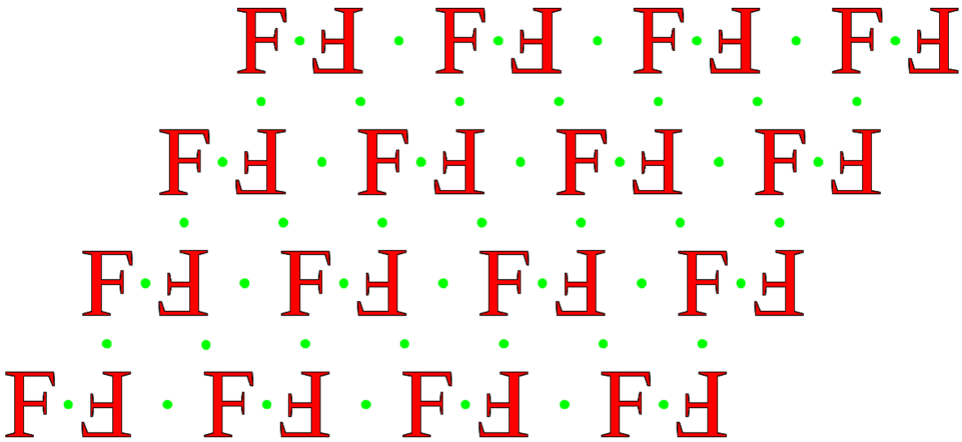
明らかに平行移動による繰り返しがあります。上向きの魚（トビウオではなく金魚？）と下向きの魚の 1 対と上向きと下向きの鳥（ツバメ？）の 1 対を組み合わせたものが単位で、それを上下、左右と平行移動して全平面を覆う規則的文様になっています。

点対称（π 回転）中心は鳥の羽同士の前端が接するところ（間に挟まるものが魚の胸びれか尾びれかで 2 種類あります）と、鳥の頭同士が接するところと、鳥の尾羽同士の先端が接するところにあります。

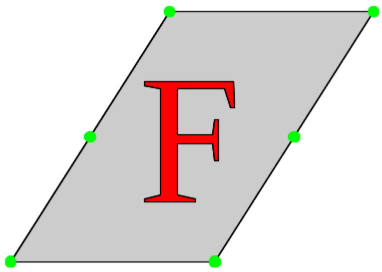
$p2$ 文様は点対称と一般格子を含む規則的文様です。どこかに点対称中心があるのですから、その近くに F をおくと、その対称移動と合わせて、次の配置ができます。



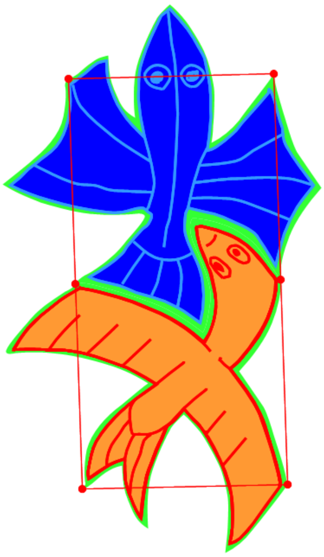
さらに、この形を一般格子により移動したものと合わせれば $p2$ 文様を得ることができます。自動的にたくさんの点対称中心ができます。

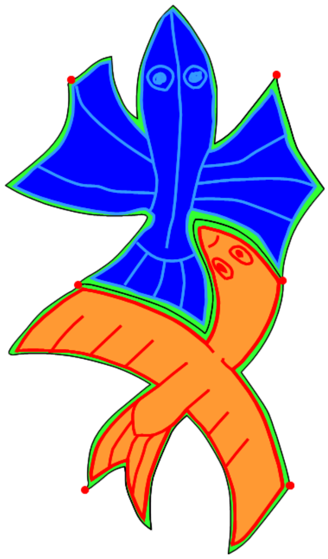


$p2$ 文様の基本領域は F1 つ分ですから、点対称中心のつくる平行四辺形 2 個分の平行四辺形です。

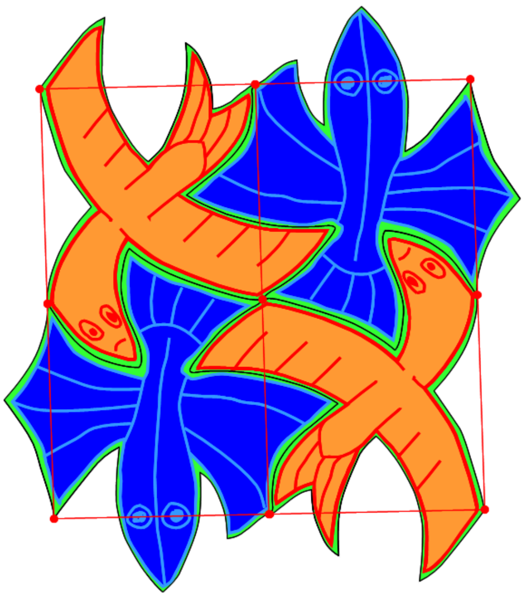


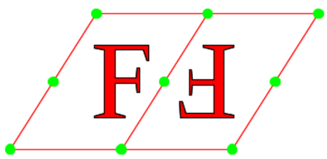
　対応するエッシャー文様の基本領域を左図で示します。ここで、平行四辺形はほとんど長方形です。



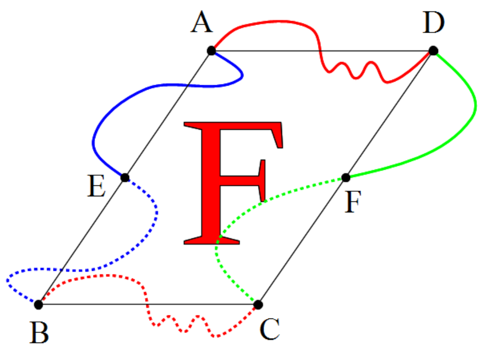


一方、右図の魚と鳥も基本領域です。実際、点対称移動したものと合わせると、こうなります。

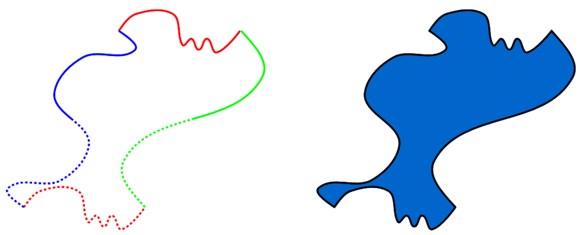




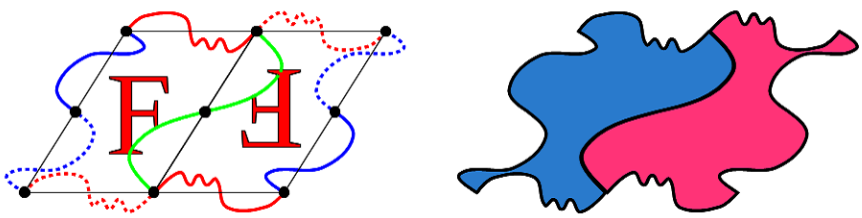
平行四辺形の基本領域 ABCD を次のように変形します。E、F はそれぞれ、AB、CD の中点です。AD を自己交差のない曲線で結び、平行移動したもので BC を結びます。AE を自己交差のない曲線で結び、E に関する点対称で移したもので、EB を結びます。同様に、CF を自己交差のない曲線で結び、F に関する点対称で移したもので、FC を結びます。ここで、新たに曲線を描くときは、すでに描いた曲線と交わらないようにします。

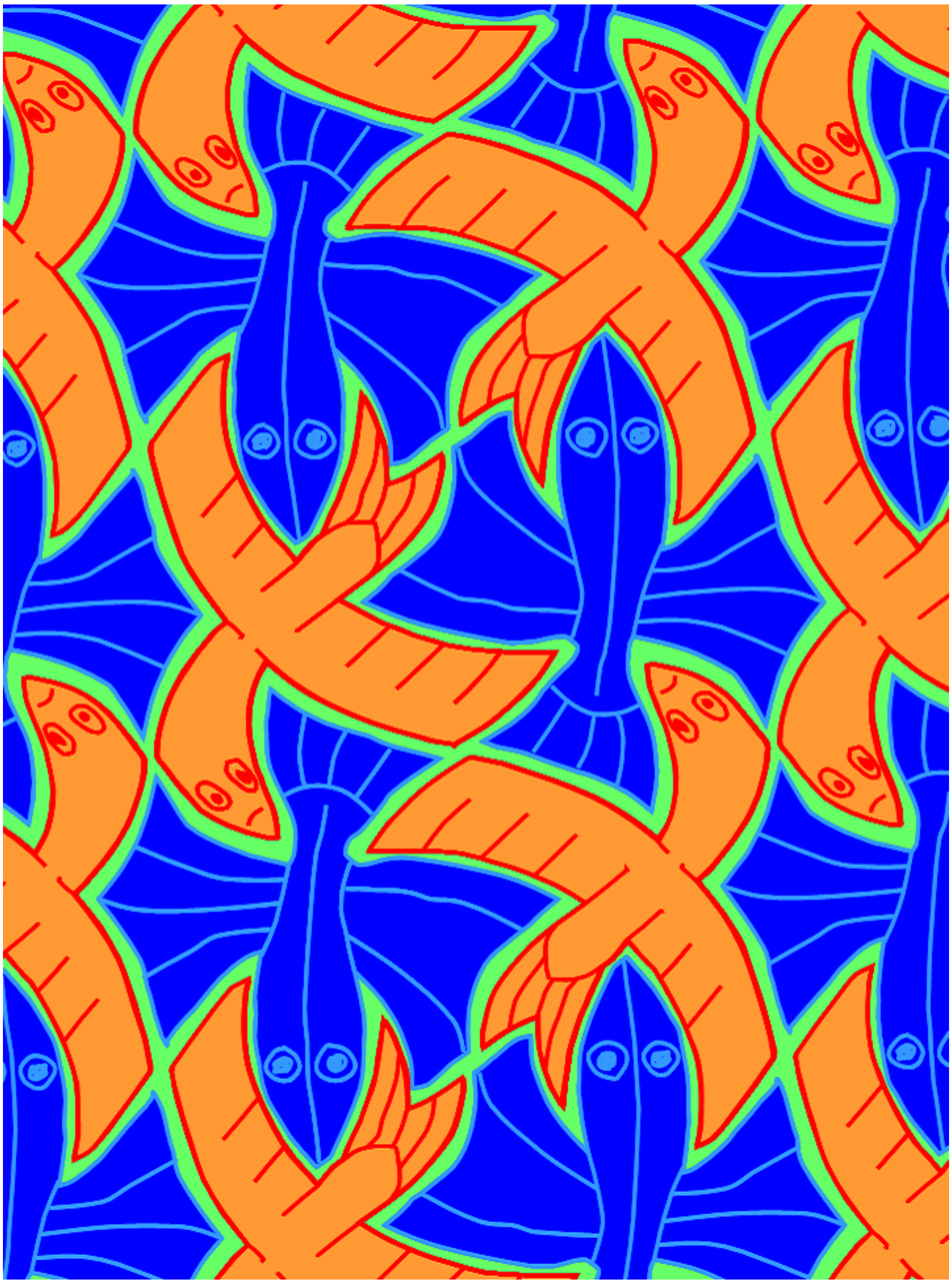


得られた閉曲線 AEBCFD は領域を定めます。



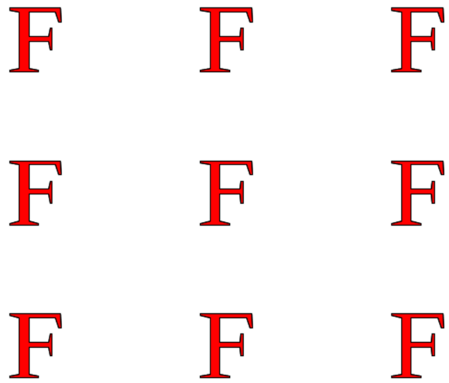
この領域が $p2$ の基本領域になっていることを確かめます。点 F で点対称すると、うまくつながって、新しい領域ができますが、上下の辺、左右の辺、共に平行移動で合同で、したがって、上下左右に無限につなげることができます。



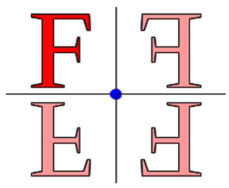


3　長方格子：「pmm」（岡澤隆太）

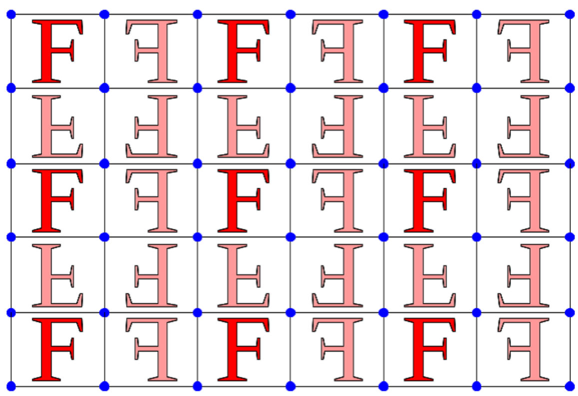
長方格子の F は次のように並びます。並ぶ方向を x 軸、y 軸とします。



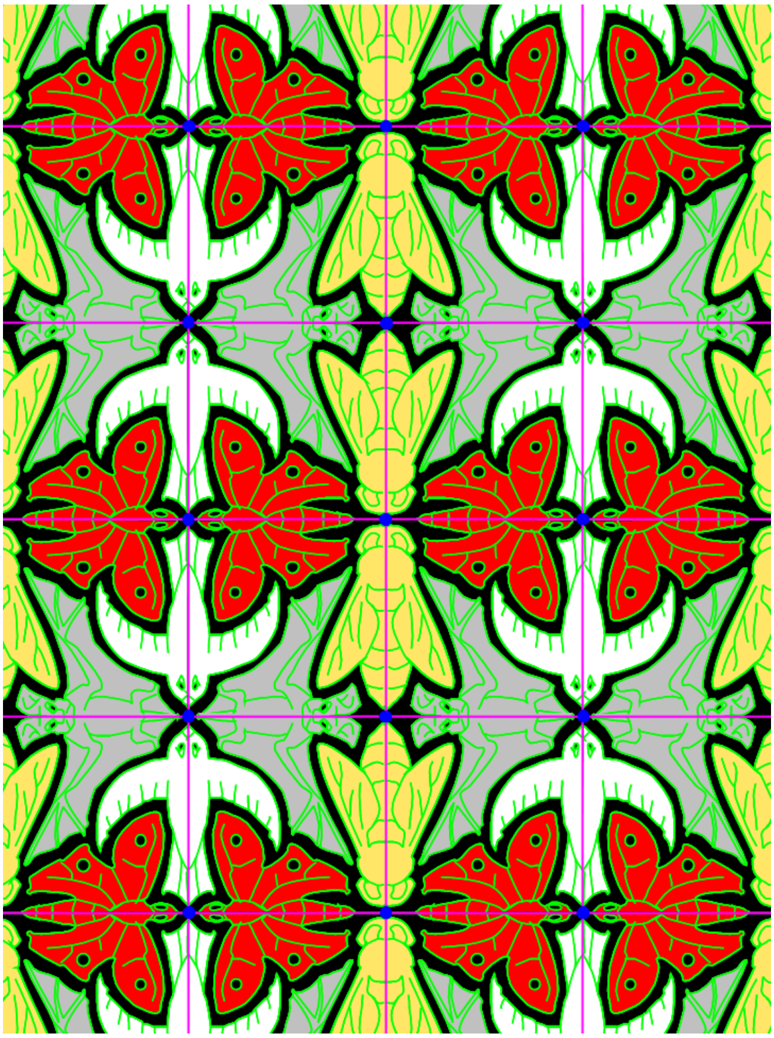
pmm の mm は 2 方向の鏡映を含むことを示します。m は mirror で鏡映を表します。ちなみに、p は primitive 原始的を表し、格子が面心格子でないことを示します。鏡映をしても、長方格子が変わることはありませんから、鏡映の方向は x 方向と y 方向です。したがって、F は 4 つ組で現れます。



長方格子と合わせれば、自動的に pmm の文様ができます。

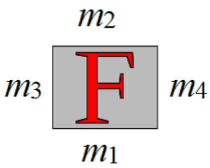


pmm に属するエッシャー文様です。

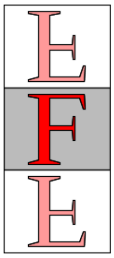


この文様の基本領域です。

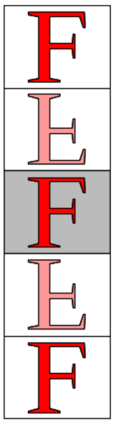
もう一度、pmm 文様の成り立ちを調べます。一つの基本領域を選びます。上下の辺（横辺）に関する鏡映を m_1、m_2 とし、左右の辺（縦辺）に関する鏡映を m_3、m_4 とします。pmm 文様の合同変換群のすべての元が、m_1、m_2、m_3、m_4 の積で表されることを示します。



基本領域に m_1、m_2 を作用させると



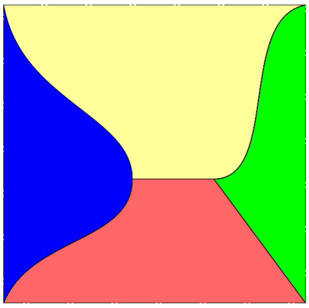
となります。さらに、m_1、m_2 を作用させると



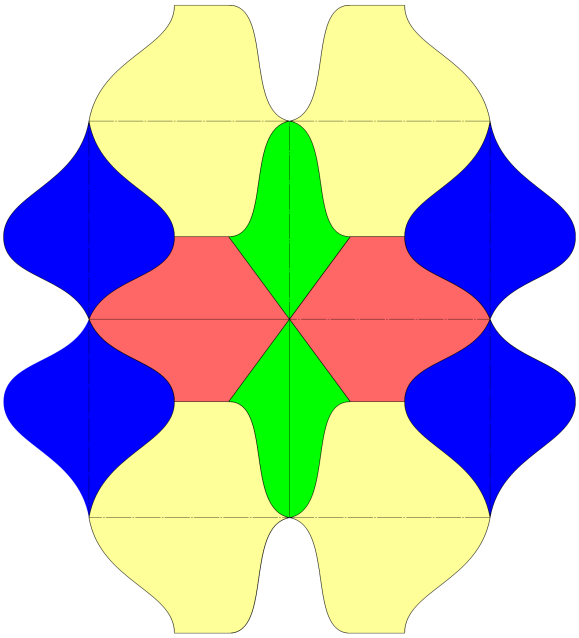
となります。m_1、m_2 を何度も作用させると、上下の列のすべての F に移ることができます。

その上で、m_3、m_4 を何度も作用させると、pmm 文様全体を生成することが分かります。このように、一つの基本領域の辺に関するいくつかの鏡映の積によって合同変換群 G 全体が表されるとき、G は**鏡映群**であるといいます。pmm は鏡映群です。

鏡映群のとき、基本領域は鏡映軸で囲まれた領域ですから、連続的に変形することはできません。したがって、今までのように、基本領域の変形によりエッシャー文様をつくることはできないことになります。そのかわり、鏡映軸のまわりに線対称なタイルをつくることができます。文様は基本領域の繰り返しですから、4 つの辺にそれぞれ線対称なタイルをつくることにします。そのために、基本領域を 4 つの部分に分けましょう。

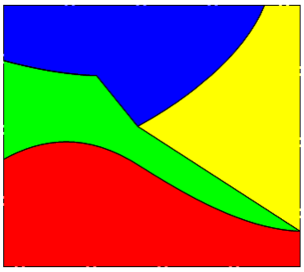


これに鏡映を作用させます。

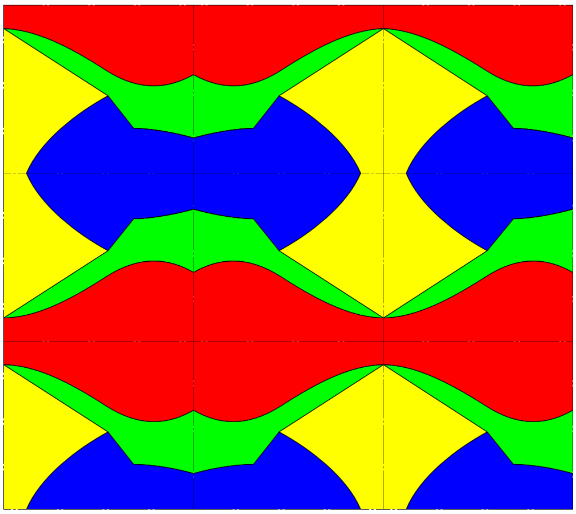


このようになります。どの領域も線対称です。

　このとき、4 つの領域の境界が頂点を通ることが重要で、そうでない切り方

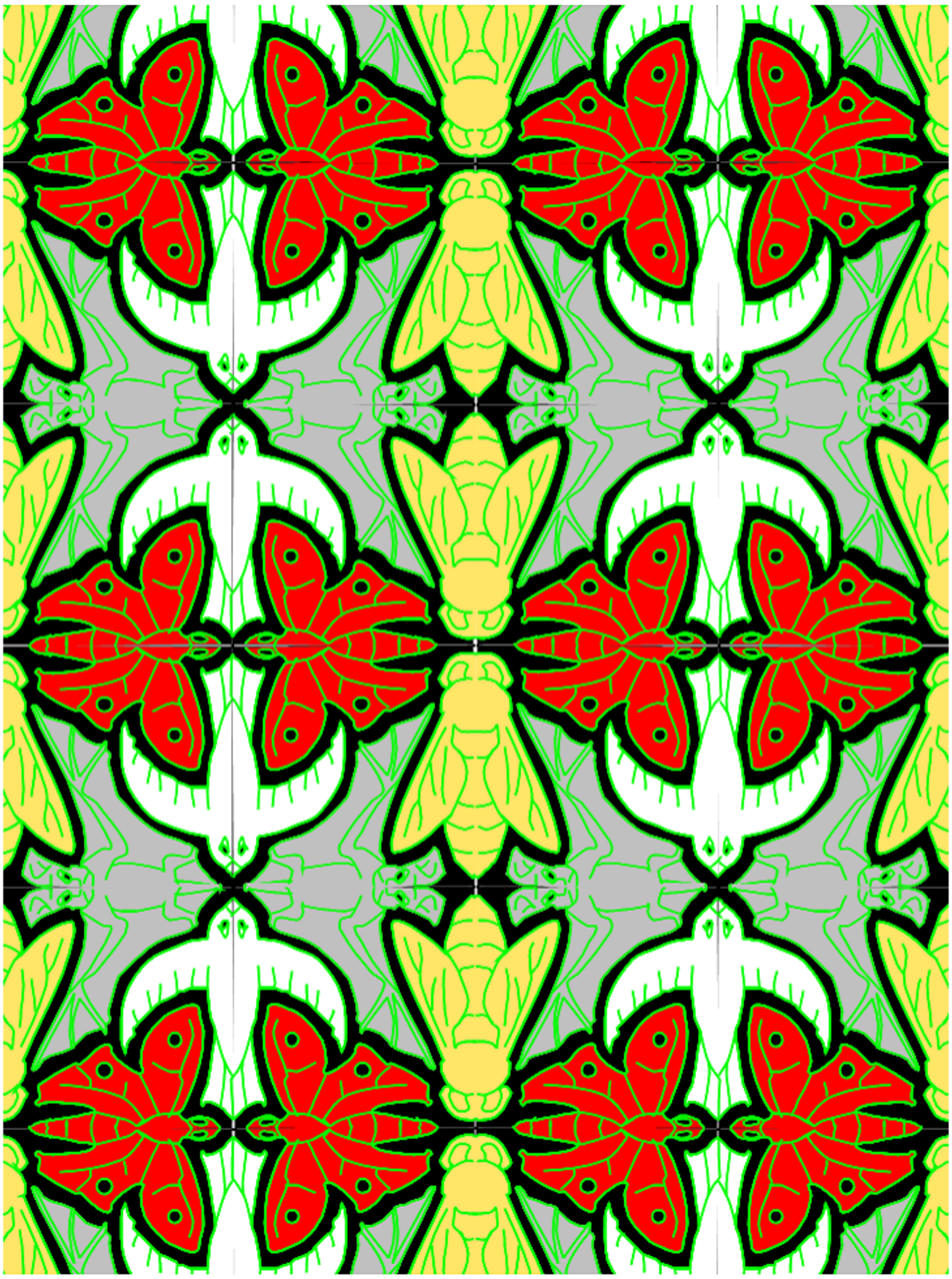


をすると



このようになり、無限に続く領域や、二重に（x 軸、y 軸）線対称な領域ができ、よいエッシャー文様になりません。

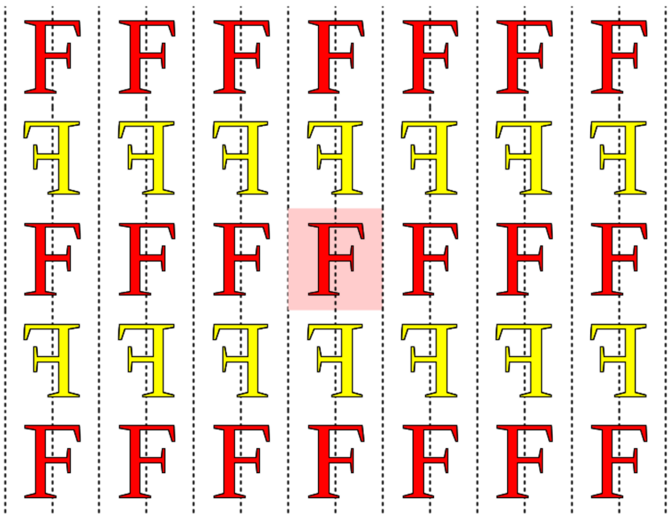
得られたエッシャー文様をご覧ください。



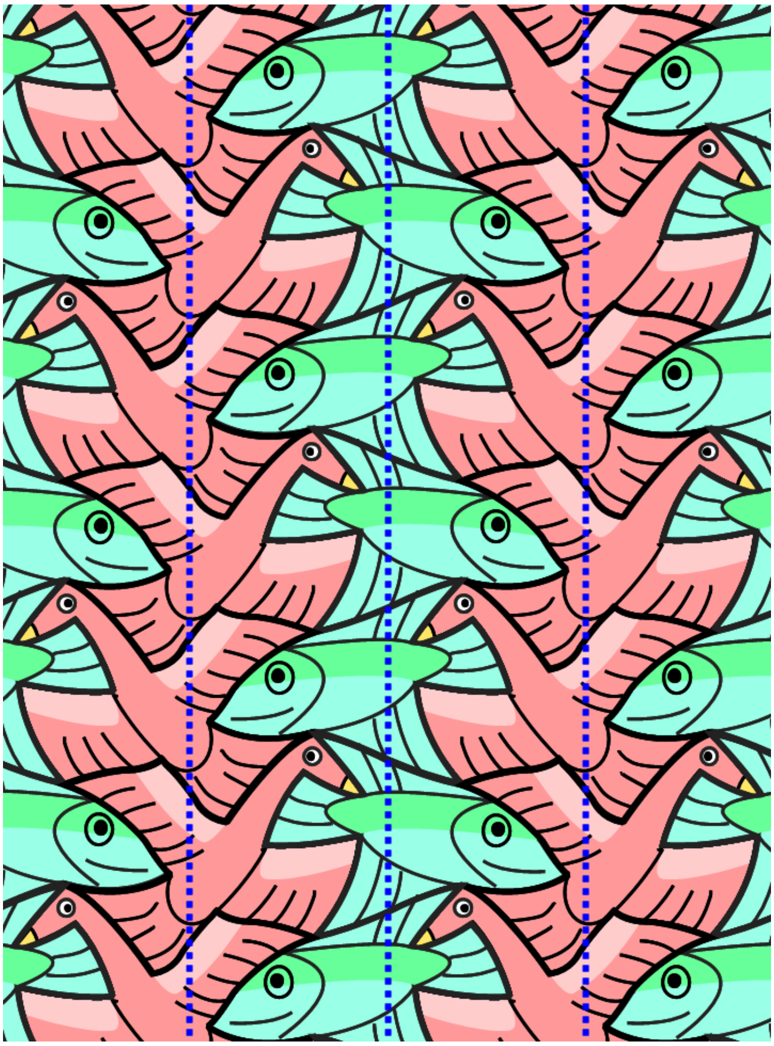
4　長方格子：「pg」（西内啓）

同じく、長方格子の pg 文様を紹介します。g は滑り鏡映（gride reflexion）を表します。長方格子をもち、1 方向の滑り鏡映を含みます。

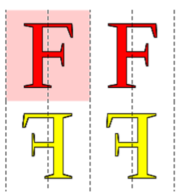
滑り鏡映軸は長方格子の x 方向か y 方向です。ここでは、y 方向だとしました。後は x 方向に平行移動すれば pg 文様の完成です。滑り鏡映軸は文字の上だけでなく、その中間にもあります。

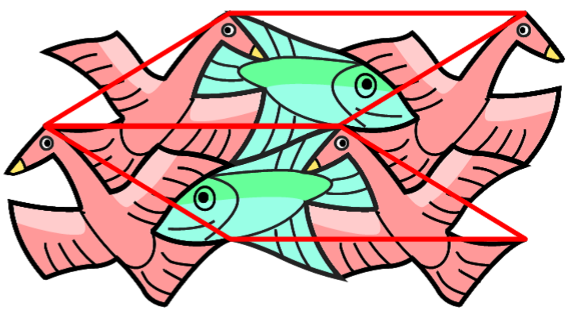


pg に属するエッシャー文様です。

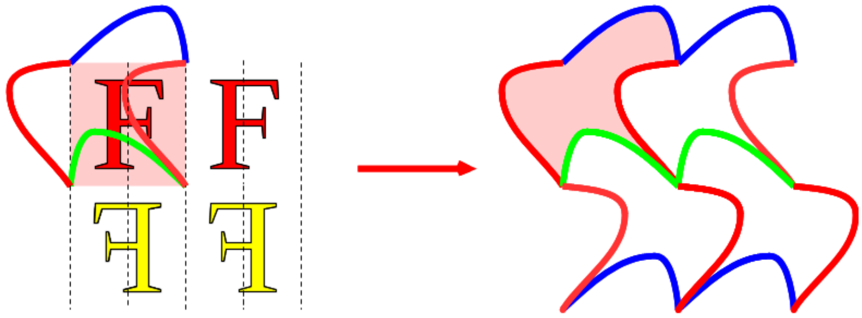


その基本領域として下図の平行四辺形を選ぶことができます。



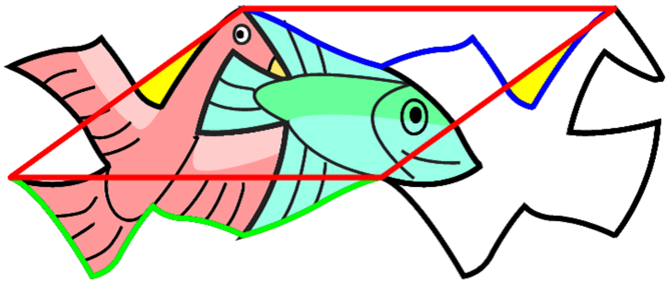


pg 文様においては、下図のように基本領域を変形することができます。

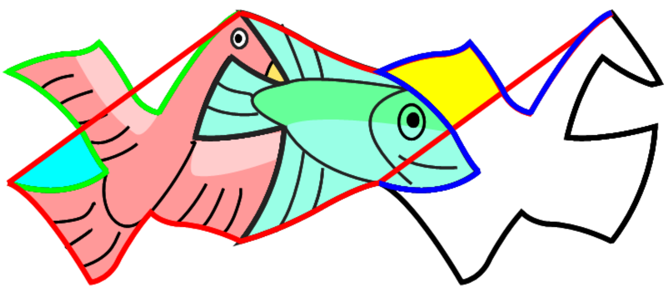


長方形の基本領域に対して、左右の辺を平行な曲線で置き換えます。上下の辺を上下の曲線に置き換えますが、2 つの曲線は滑り鏡映で移り合います。

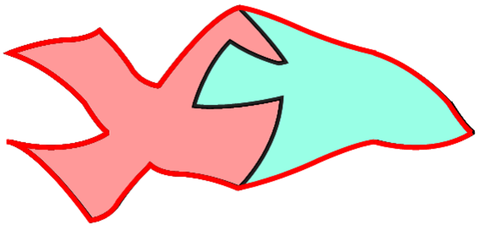
平行四辺形の基本領域に対して、まず、左の水鳥の首の後の、黄色の領域を切り取り、右の黄色の領域に貼り付けます。その上で、青線の上の部分を切り取り、滑り鏡映で移動して、緑線の上の部分に貼り付けます。



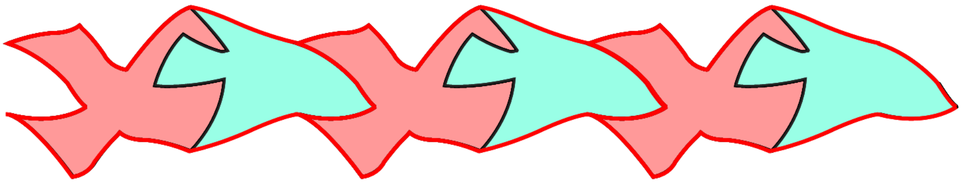
さらに、右の黄色の領域を切り取り、左の水鳥の羽の部分に貼り付けます。また、左の水色の領域を切り取り、右の魚の頭の部分に貼り付けます。



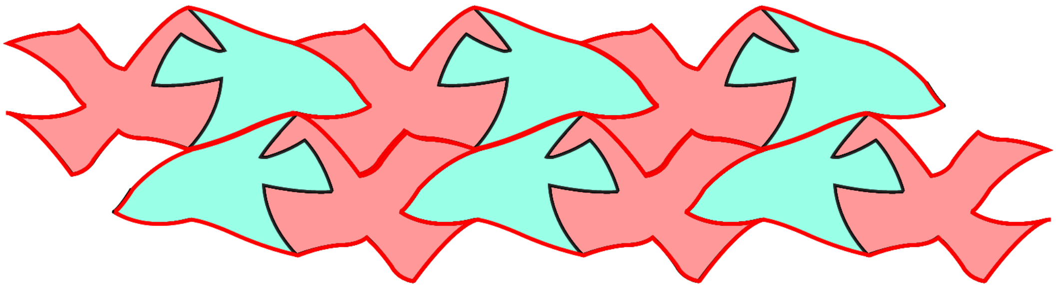
以上より、基本領域は次の形に変形できました。



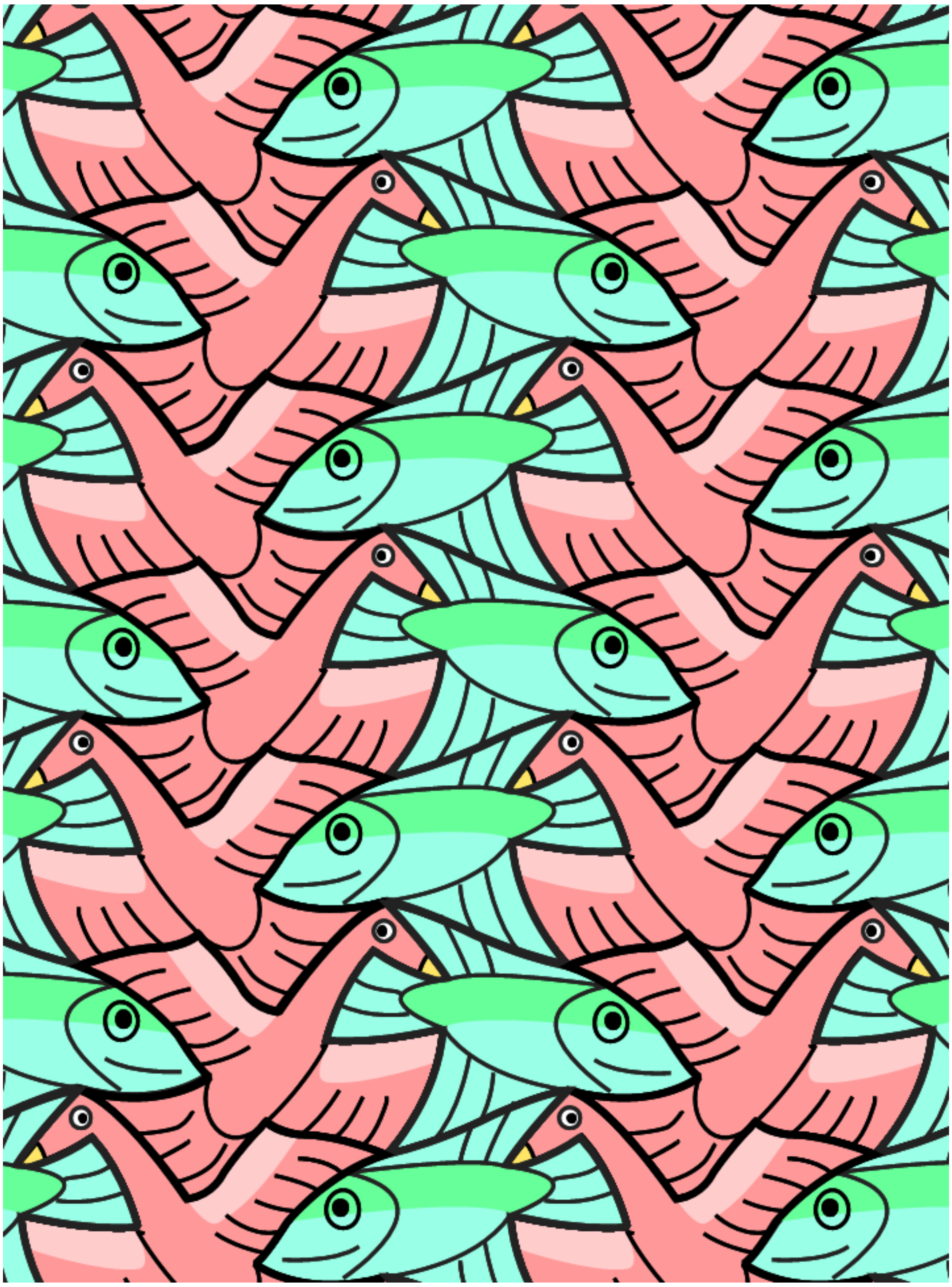
左右につなげます。



滑り鏡映して上下につなげます。

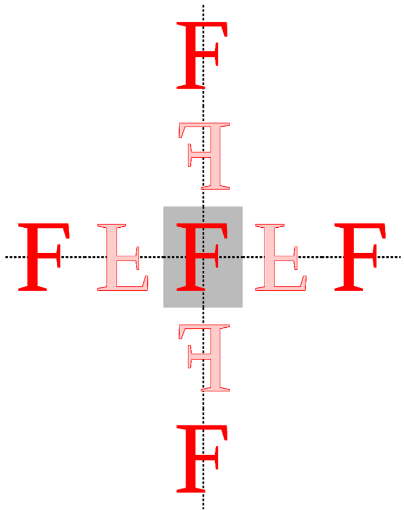


pg に属するエッシャー文様ができました。

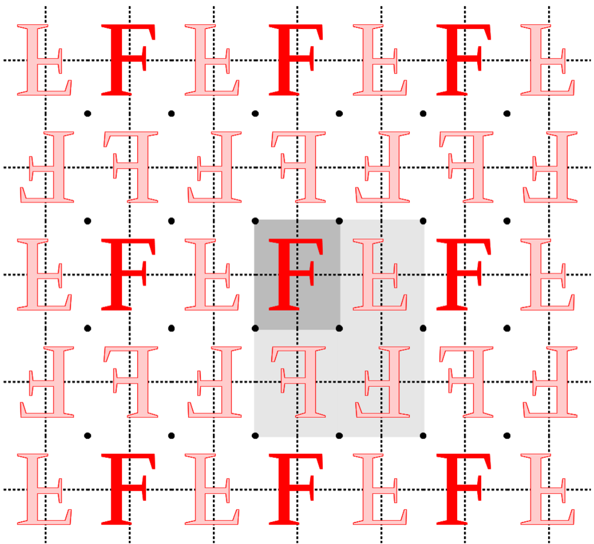


5　長方格子：「pgg」（小山内健人）

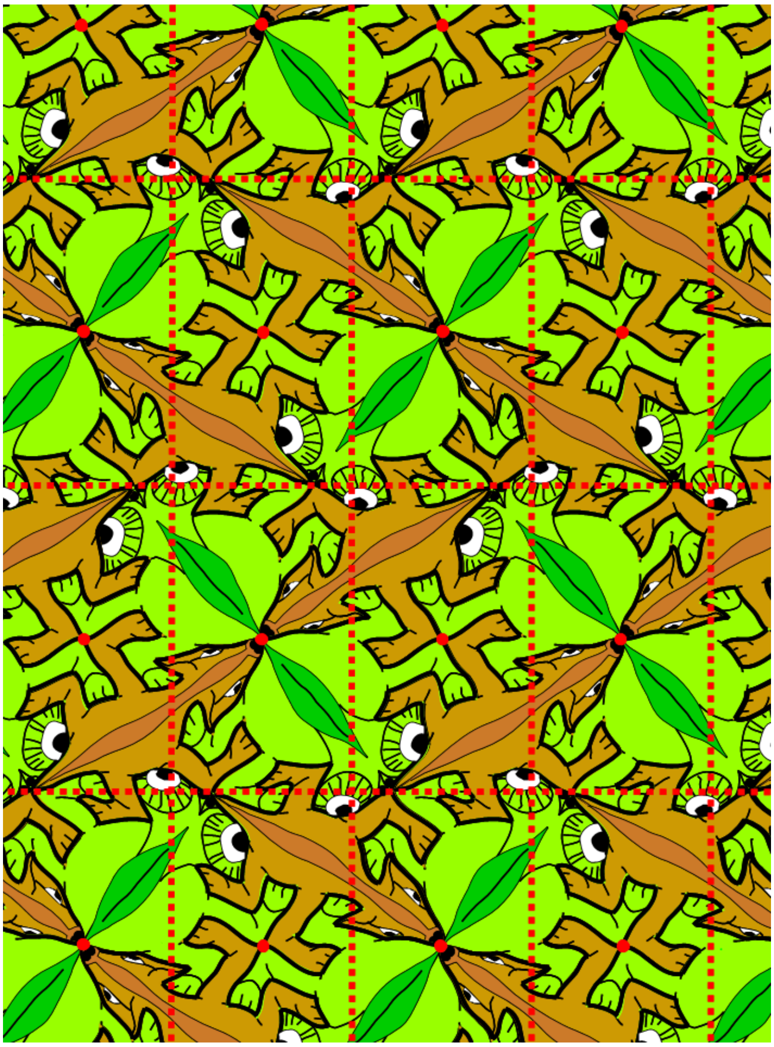
最後の長方格子は pgg 文様です。2 方向の滑り鏡映を含みます。長方格子ですから、滑り鏡映軸の方向は x 軸、y 軸方向です。滑り鏡映軸の交点に F を置きましょう。



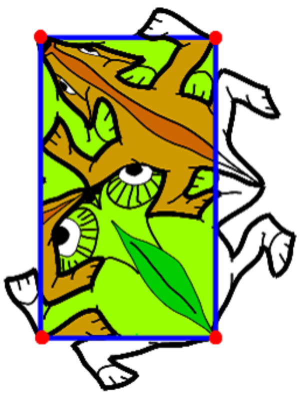
F が上下の F に滑り鏡映で移されるとき、左右の F も滑り鏡映で移されます。F が左右ののF に滑り鏡映で移されるときも同様ですが、同じ配置になります。その結果、(11) 方向の F と点対称になります。その結果得られたものが pgg 文様です。薄い灰色の部分が繰り返しの単位になっています。



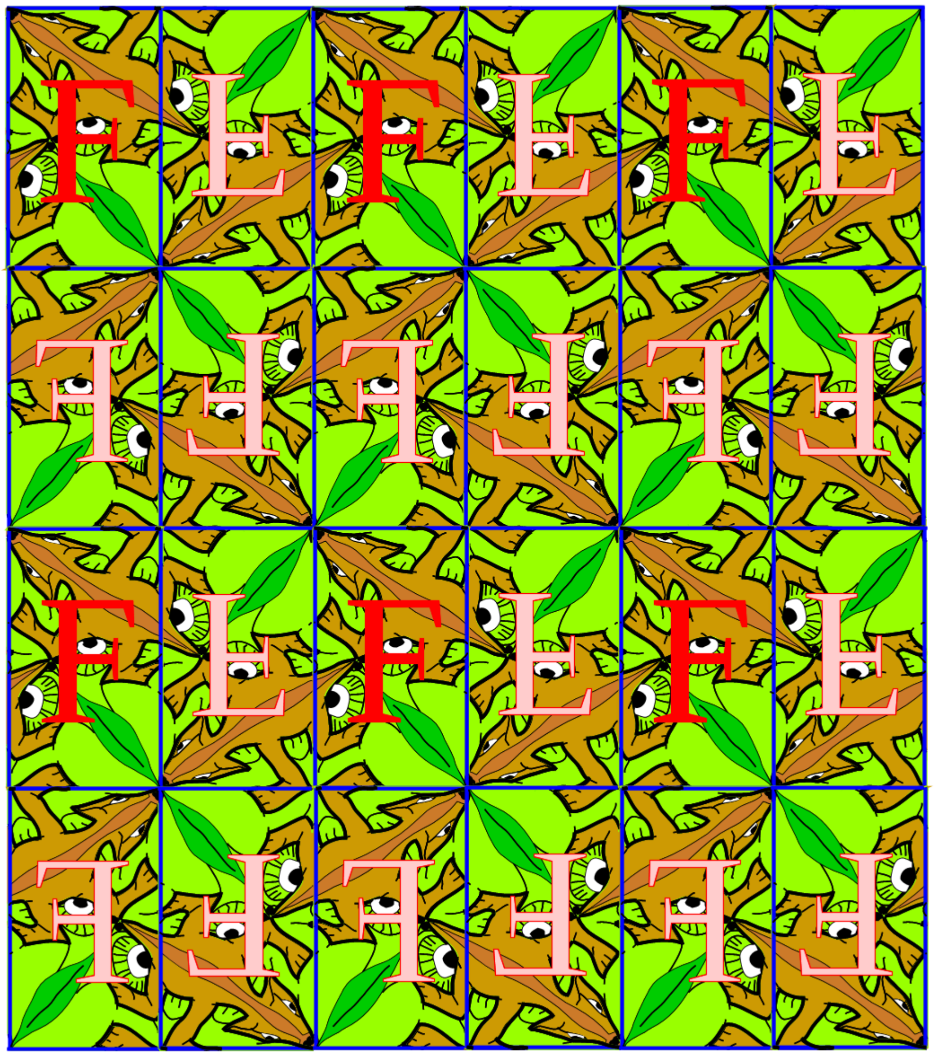
pgg に属するエッシャー文様です。



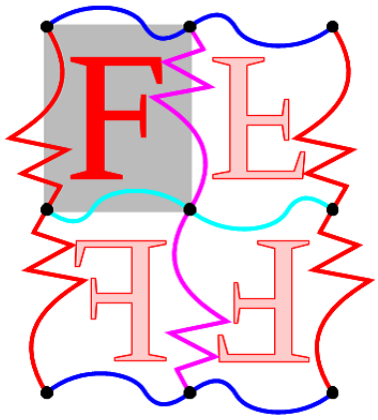
その基本領域として点対称中心を頂点とする長方形を選ぶことができます。



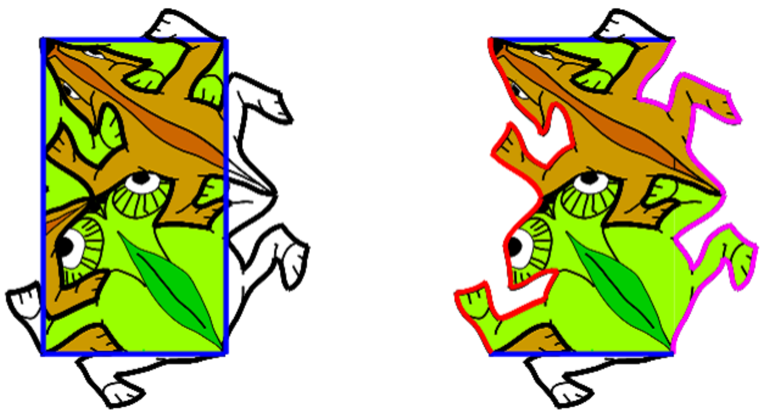
エッシャー文様と pgg の F の文様を重ねてみました。F の左上の角がちょうど茶色のトカゲの頭に対応しています。どの向きの F に対してもそうなっています。このエッシャー文様が pgg に属していることが確かめられます。



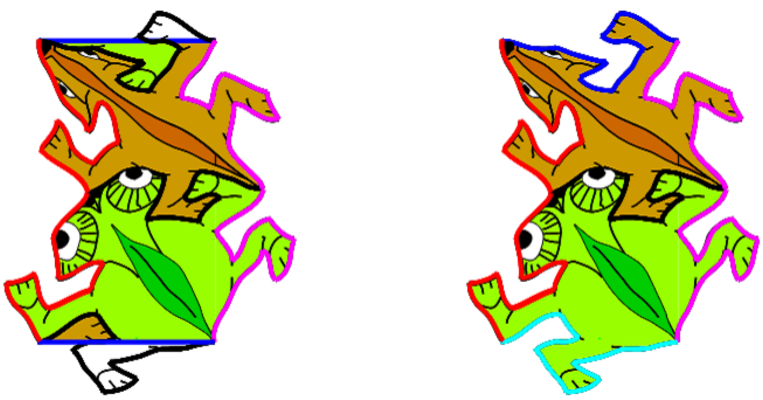
pgg 文様でも、基本領域の変形ができます。長方形の向かい合う辺を滑り鏡映で移り合う曲線で置き換えることができます。



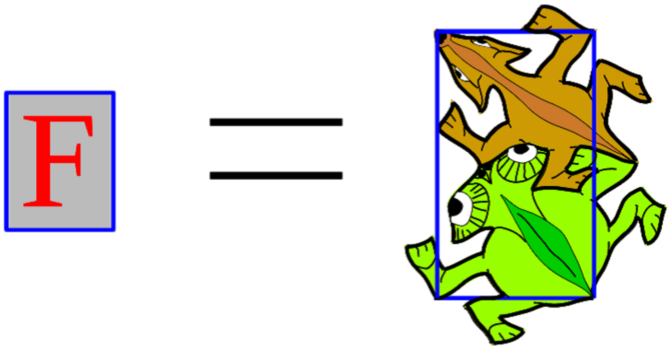
エッシャー文様の長方形の基本領域の左右辺を滑り鏡映で移り合う曲線で置き換えます。



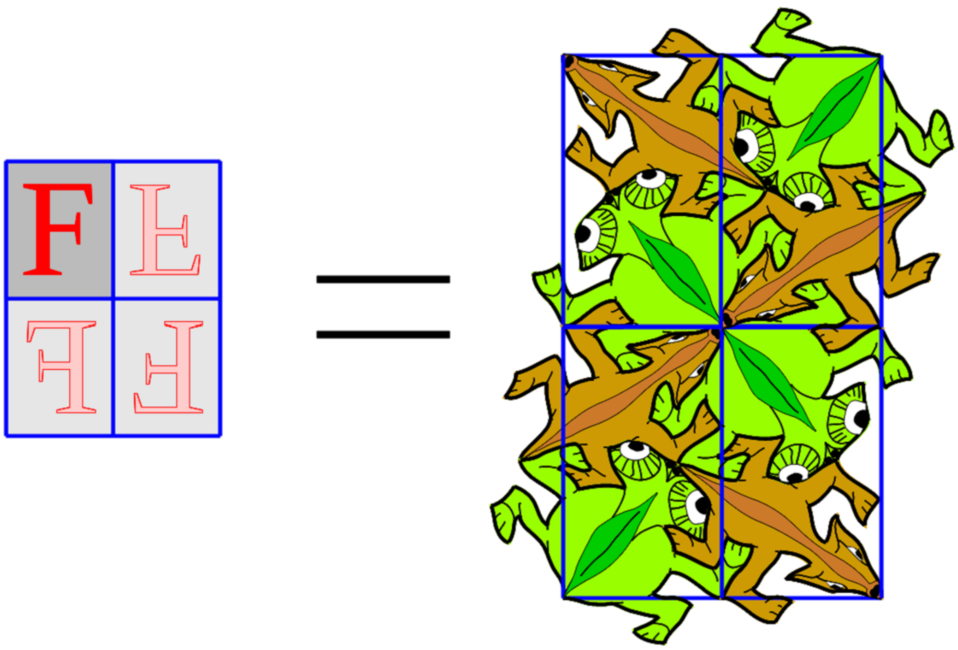
さらに、上下辺を滑り鏡映で移り合う曲線で置き換えます。



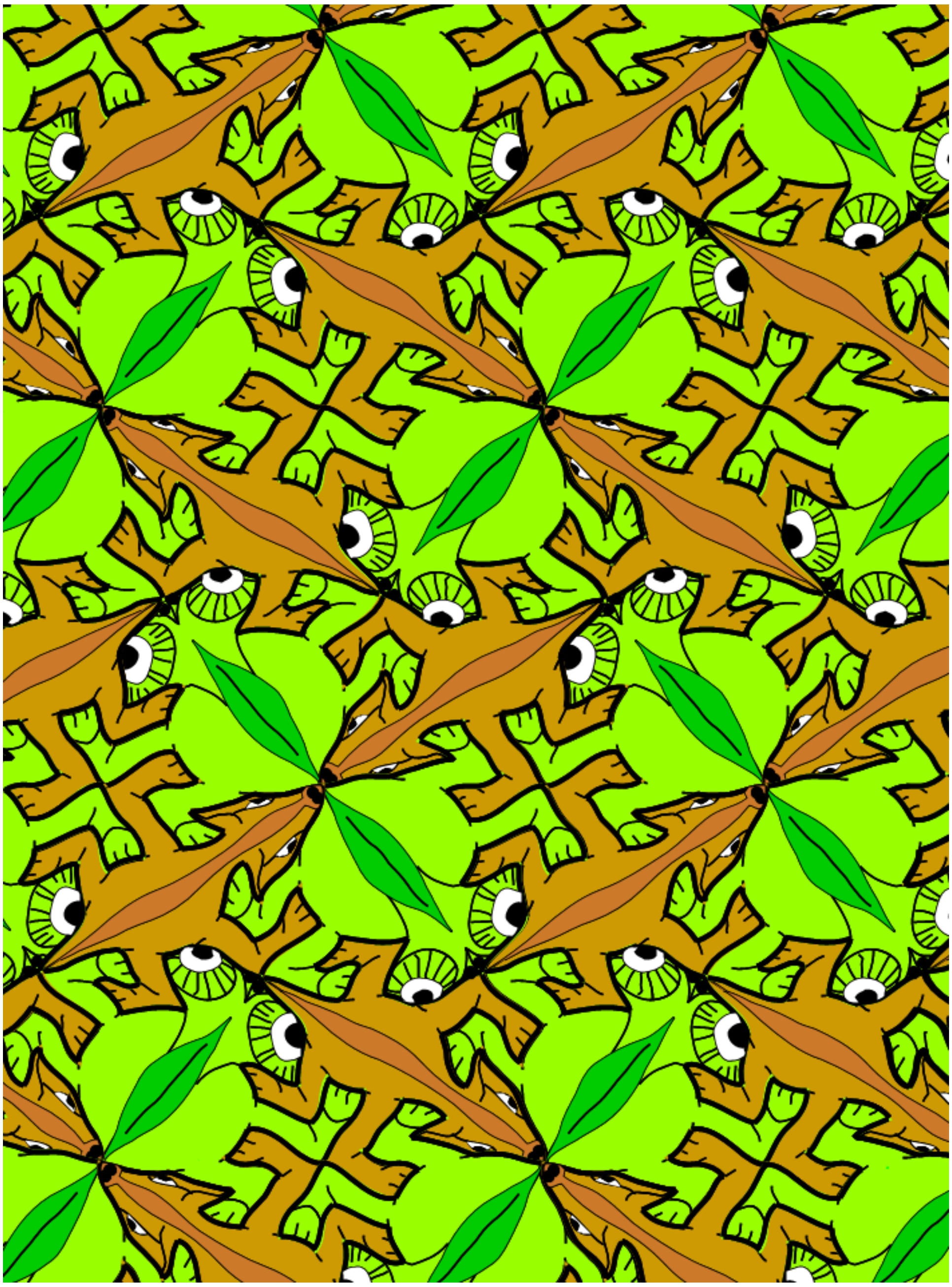
したがって、トカゲとカメレオンの組み合わせが基本領域で



それを滑り鏡映と点対称を作用させたものが繰り返しの単位となります。
上下、左右の境界の曲線が平行移動になっていることに注目してください。

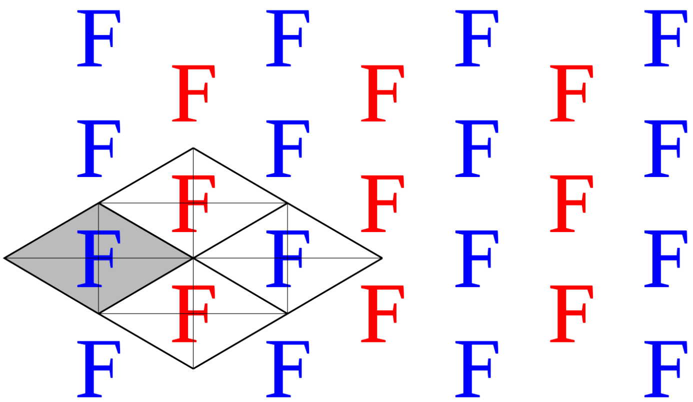


pgg に属するエッシャー文様をご覧ください。



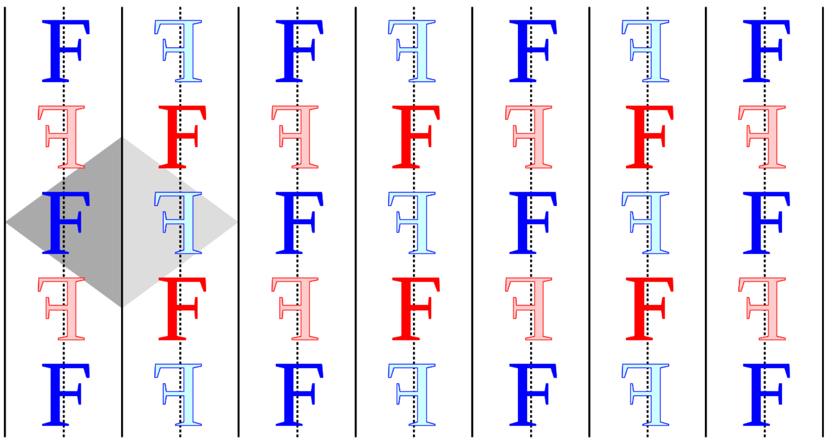
6　菱形格子：「cm」（大杉真也）

菱形格子は菱形を基本領域とする格子です。菱形の対角線は直交します。それを x 軸方向、y 軸方向とする座標で考えます。F の配置は次のようになります。

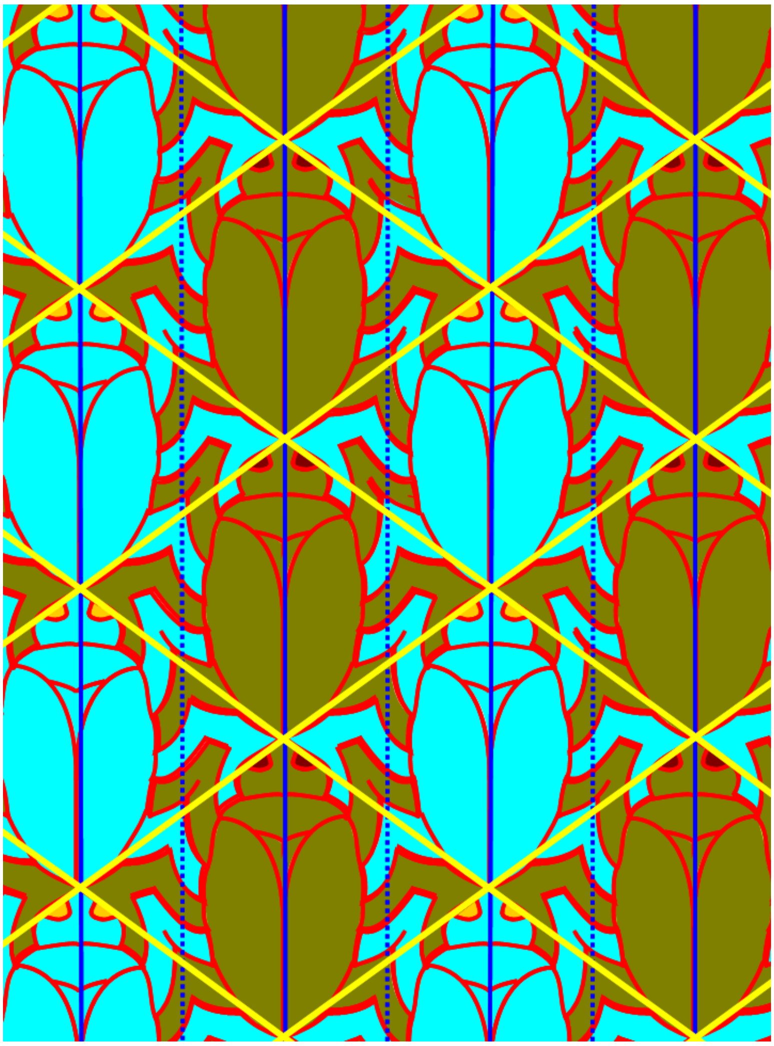


この配置は二重の長方格子と考えることができます。赤の長方格子と青の長方格子です。青の各長方形の中心に赤の F があります。逆もいえます。このような構造を面心格子 centered といいます。

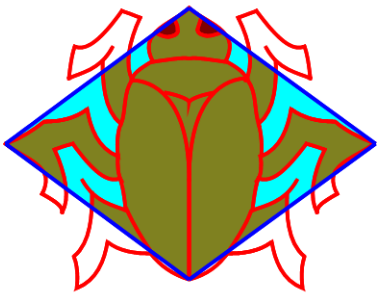
cm の c は菱形格子を表し、m は 1 方向の鏡映を含むことを表します。鏡映軸の方向は、格子の不変性から、x 軸方向、y 軸方向のいずれかです。ここでは、y 軸方向にとります。その鏡映軸に関し、F と裏文字の F の対をおきます。それに対し、菱形格子を作用させると、cm 文様が得られます。青い F の裏文字と赤い F は滑り鏡映の関係にあり、その滑り鏡映軸は両側の鏡映軸のちょうど中央にあります。



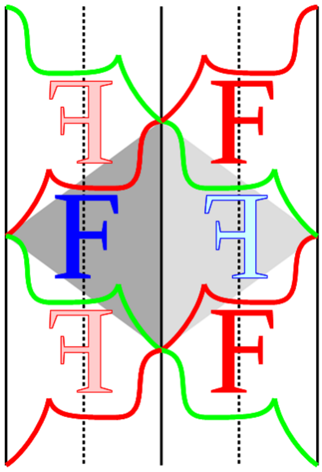
cm に属するエッシャー文様です。



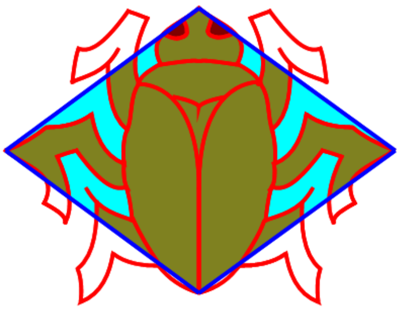
菱形の部分が格子群の基本領域です。対称軸で切断した片側が cm の基本領域です。

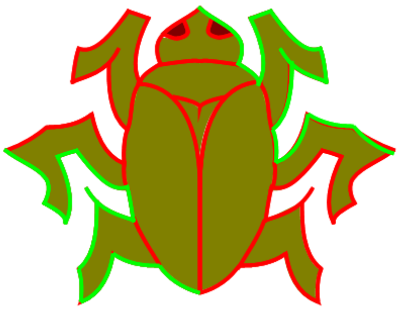


cm 文様でも、基本領域の変形ができます。菱形の 1 辺を曲線で置き換えることができます。対称軸で左右に移します。滑り鏡映で上下に移します。

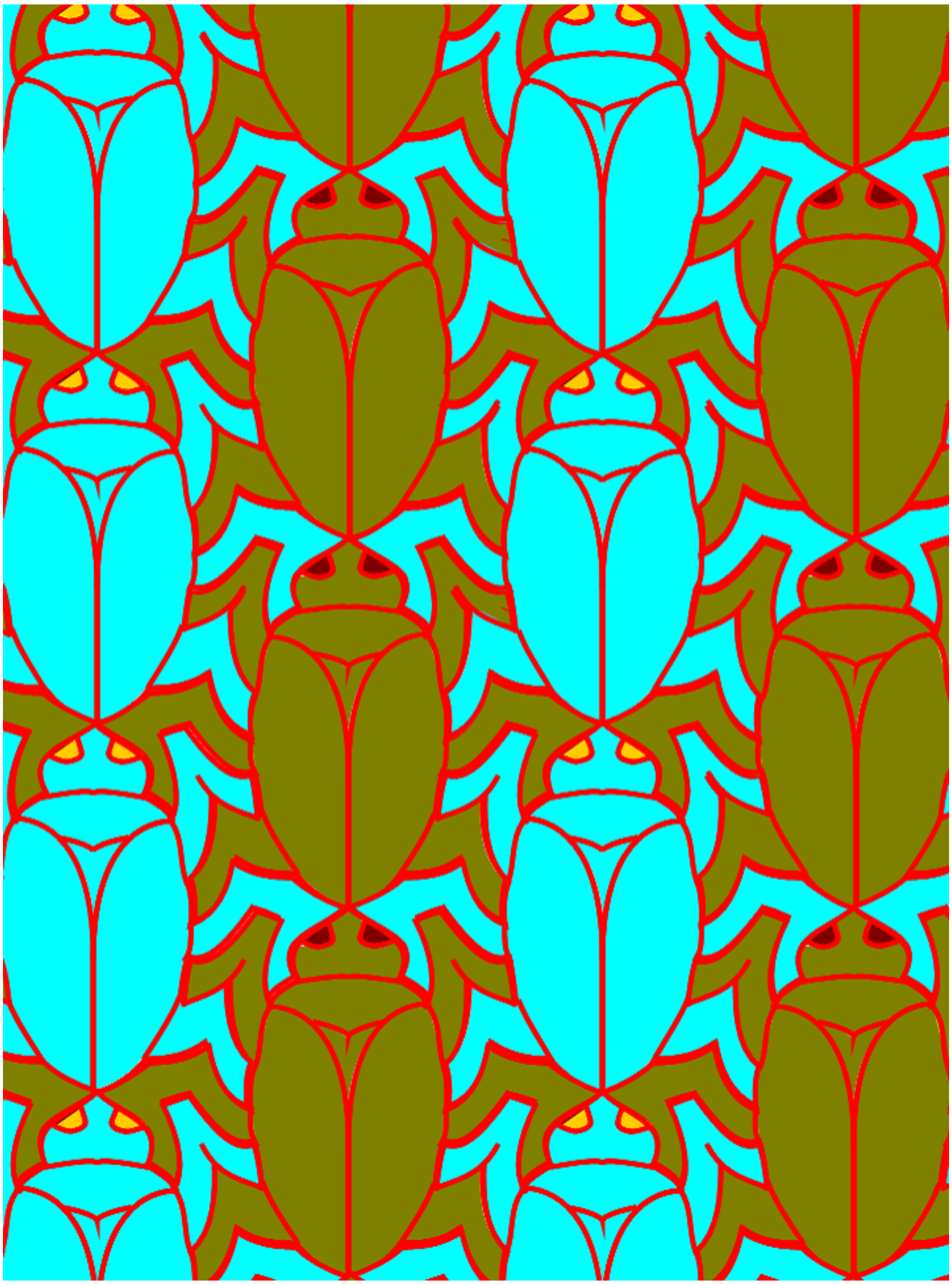


コガネムシの基本領域ができました。



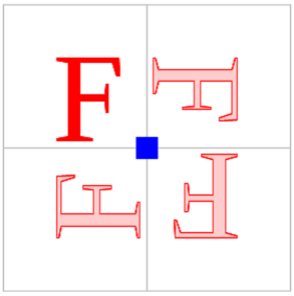


cm に属するエッシャー文様をご覧ください。

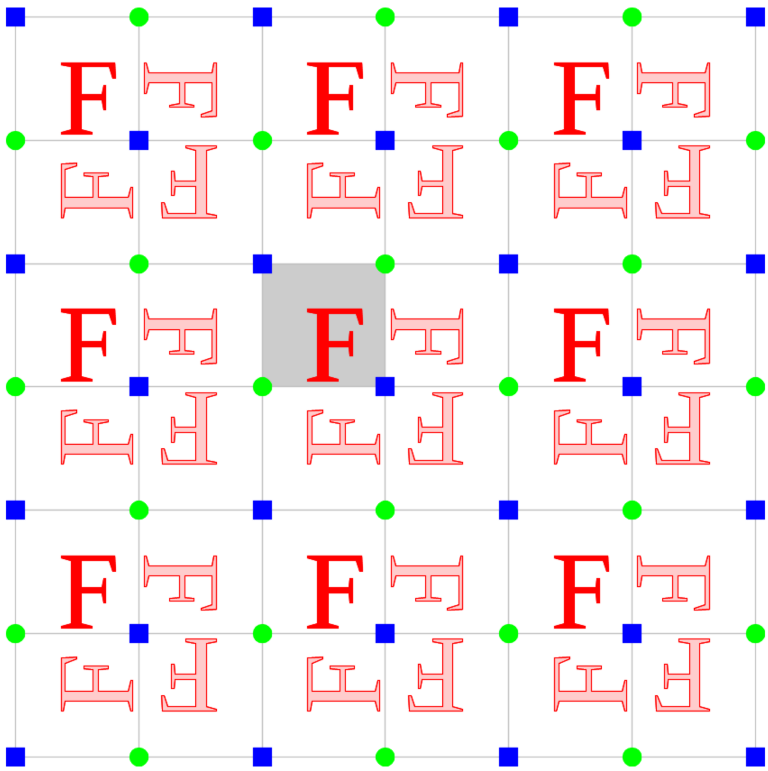


7　正方格子：「$p4$」（高橋雄大）

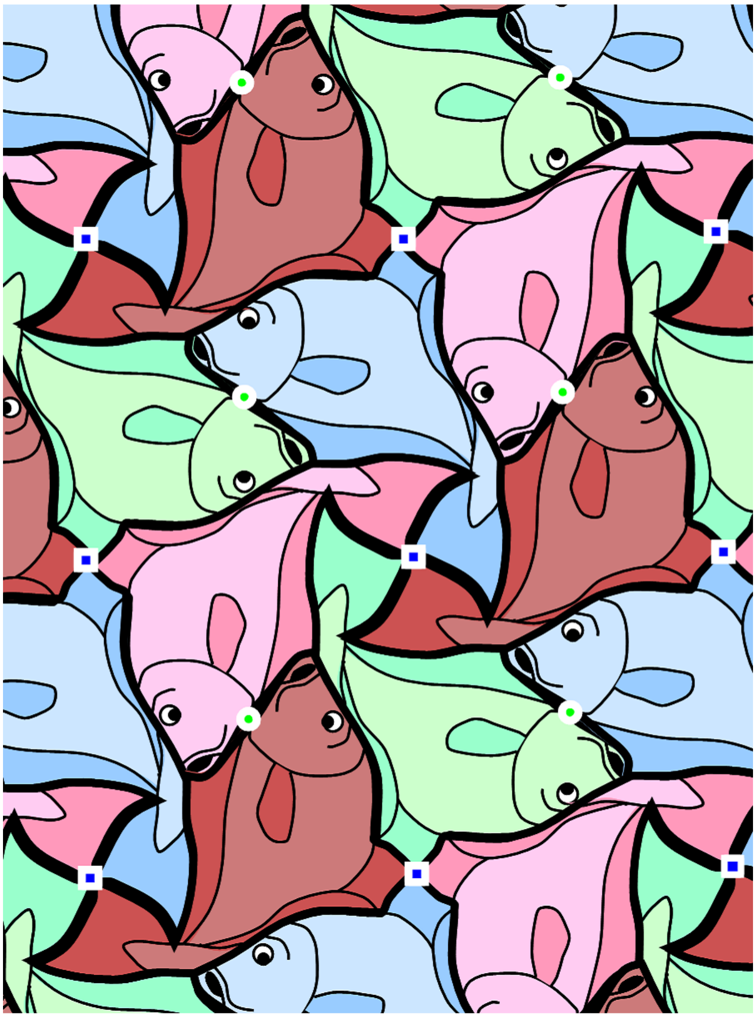
正方格子は正方形を基本領域とする格子です。辺の方向をを x 軸方向、y 軸方向とします。$p4$ の 4 は $\frac{1}{4}$ 回転、すなわち、$\frac{\pi}{2}$ 回転を表します。$\frac{\pi}{2}$ 回転を含み、正方格子をもつ壁紙群です。1 つの F に $\frac{\pi}{2}$ 回転を何回か作用させると



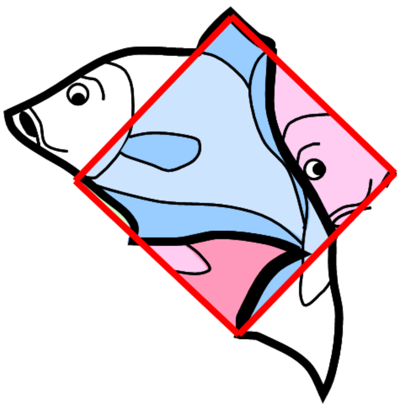
となります。これに正方格子を作用させると、$p4$ 文様です。新たに中間に $\frac{\pi}{2}$ 回転中心が現れ、さらにその中間に点対称中心＝π 回転中心ができます。



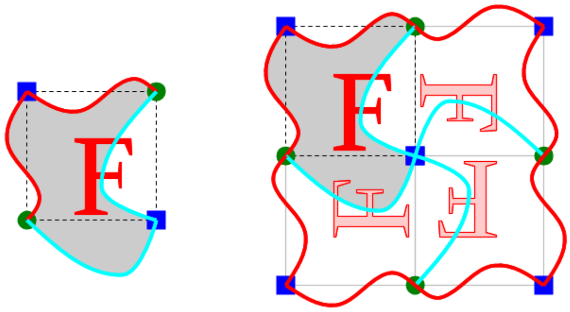
$p4$ に属するエッシャー文様です。



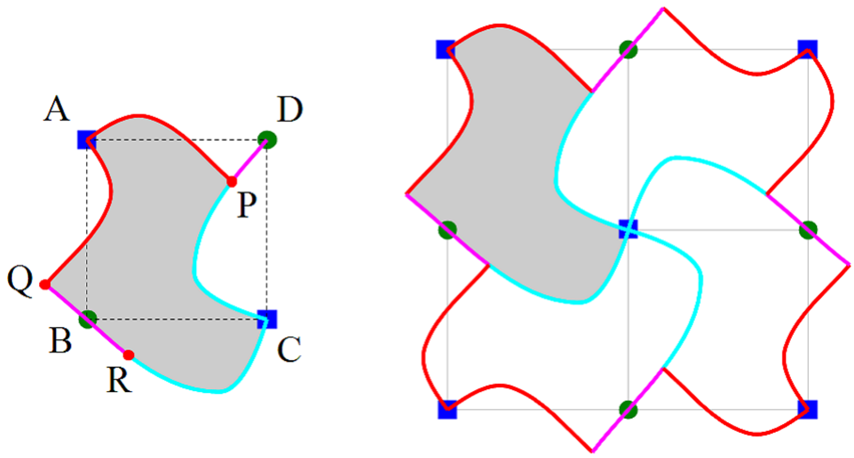
基本領域は $\frac{\pi}{2}$ 回転中心と π 回転中心を頂点とする正方形です。



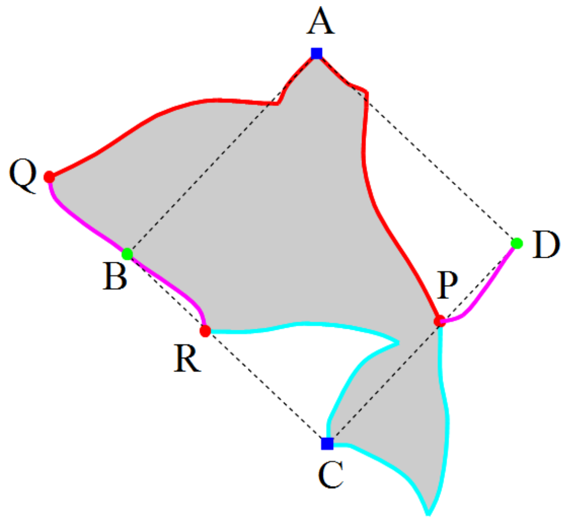
$p4$ 文様の基本領域の変形を考えます。元の基本領域は正方形です。$\frac{\pi}{2}$ 回転中心と点対称中心の頂点が交互に並びます。片方の $\frac{\pi}{2}$ 回転中心をはさむ 2 辺を $\frac{\pi}{2}$ 回転で移り合う 2 曲線（赤）で置き換えます。もう片方の $\frac{\pi}{2}$ 回転中心でも同様（水色）にします。



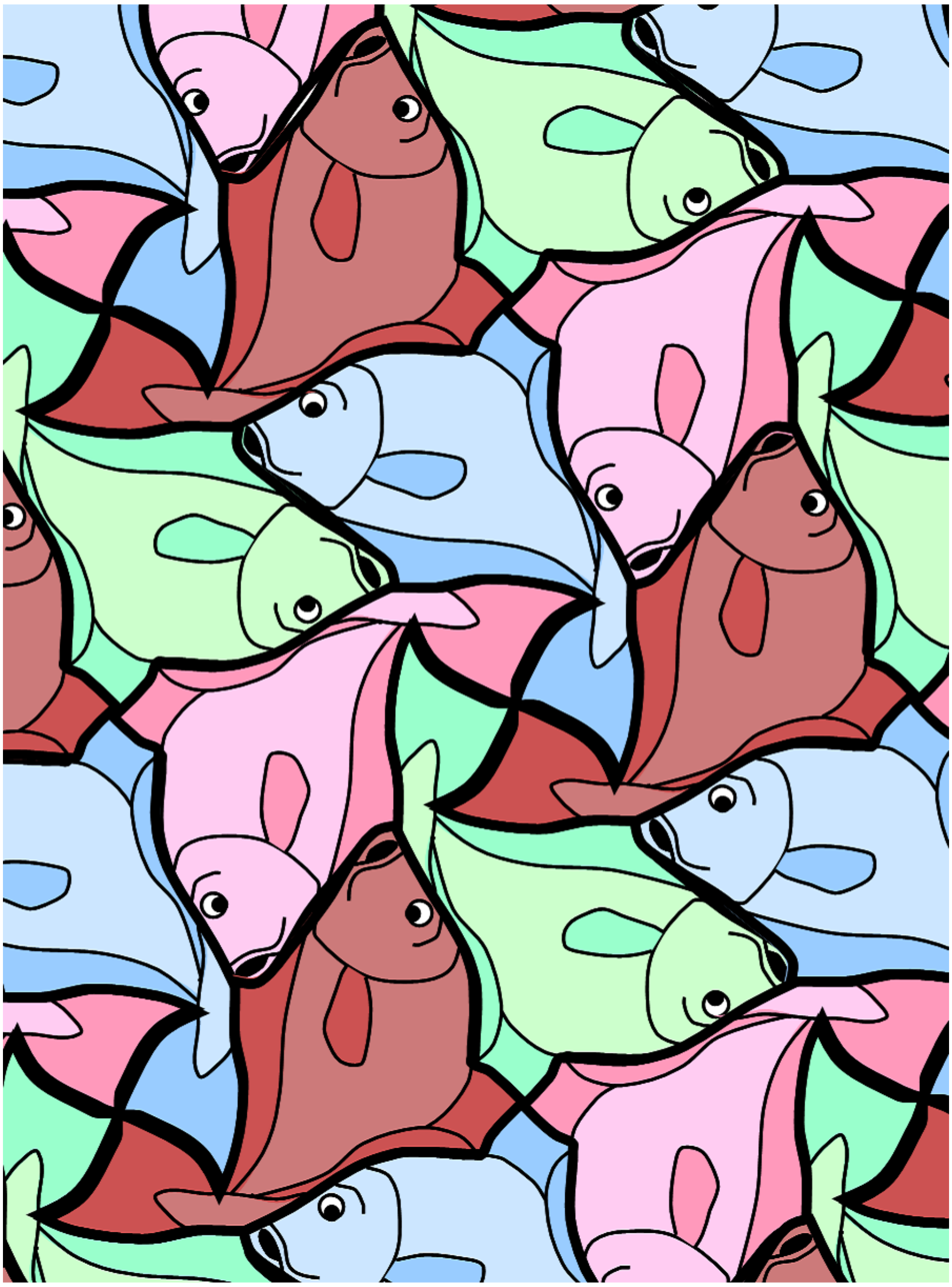
ところが、この方法では新たな基本領域も、正方形の 4 頂点を通ります。エッシャー文様の基本領域である 1 匹の魚は 3 頂点しか通りません。もう一工夫する必要があります。曲線 AP、PC、PD を選びます。辺 AD を結ぶ曲線として、曲線 APD をとります。それを A に関して $-\frac{\pi}{2}$ 回転して、曲線 AQB とします。辺 CD を結ぶ曲線として、曲線 CPD をとります。それを C に関して $\frac{\pi}{2}$ 回転して、曲線 CRB とします。曲線 APCRBQ の囲む領域が頂点 D を通らない基本領域になります。



　曲線 APCRBQ として、エッシャー文様の一匹の魚の輪郭をとることができます。

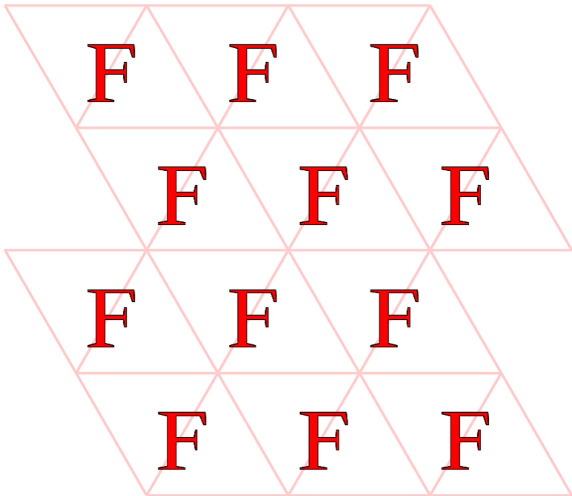


これにより、$p4$ に属するエッシャー文様をつくることができます。

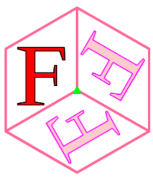


8　三角格子：「$p3$」（西岡綾加）

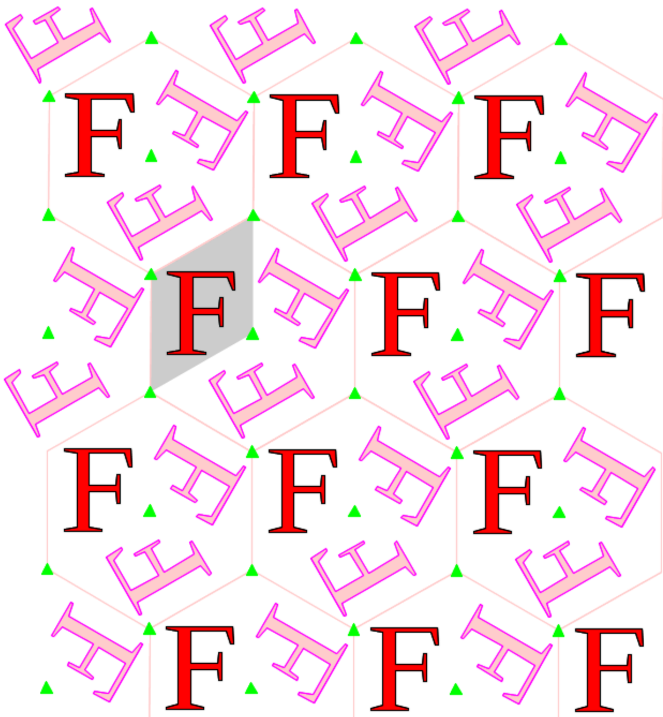
三角格子は 2 つの正三角形を合わせた菱形を基本領域とする格子です。一辺の方向をを x 軸方向とします。



$p3$ は $\frac{2\pi}{3}$ 回転を含み、三角格子をもつ壁紙群です。1 つの F に $\frac{2\pi}{3}$ 回転を作用させて得られる図形

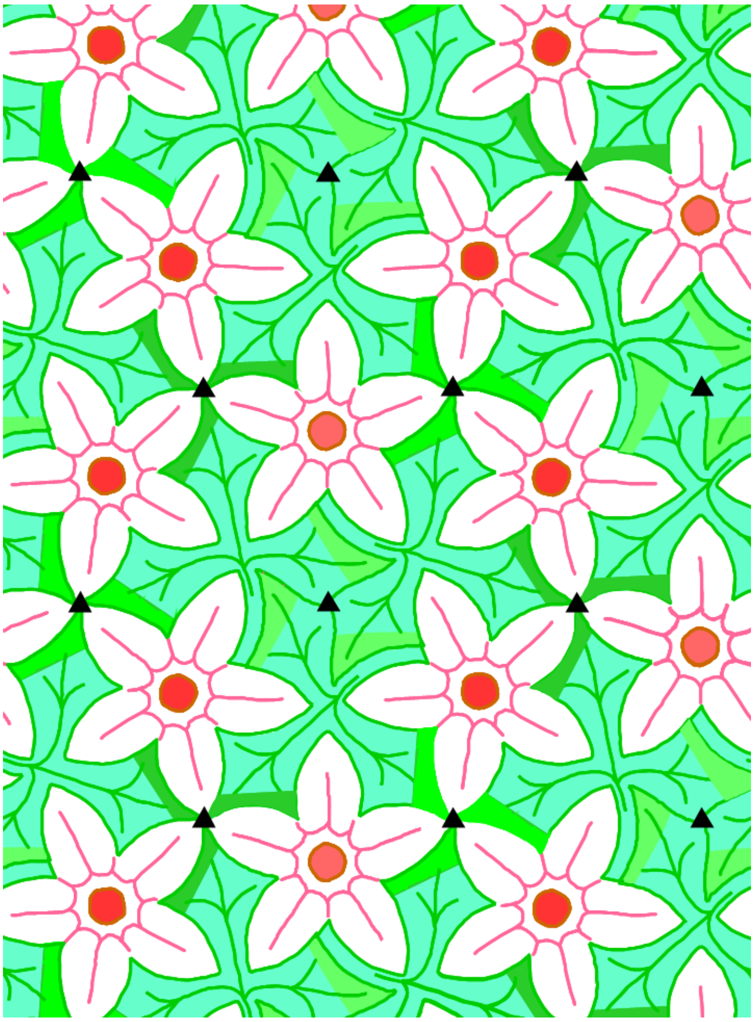


を三角格子の作用で並べると、$p3$ 文様が得られます。

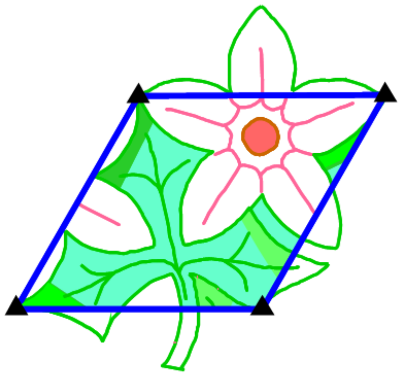


このとき、$\frac{2\pi}{3}$ 回転の中心が増えて、正六角形の中心だけでなく、頂点も $\frac{2\pi}{3}$ 回転の中心になります。

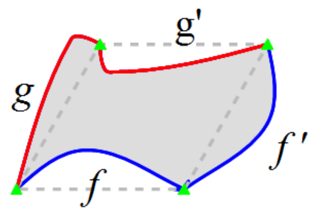
$p3$ に属するエッシャー文様です。



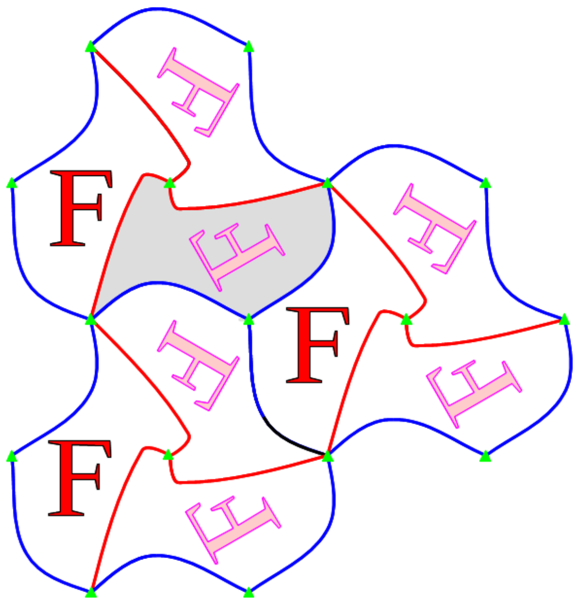
基本領域は $\dfrac{2\pi}{3}$ 回転中心を頂点とする菱形です。



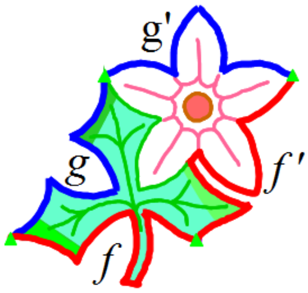
$p3$ 文様の基本領域の変形を考えます。元の基本領域は菱形です。内角は $\frac{\pi}{3}$ と $\frac{2\pi}{3}$ です。片方の内角 $\frac{2\pi}{3}$ の頂点をはさむ 2 辺を $\frac{2\pi}{3}$ 回転で移り合う 2 曲線 f と f' で置き換えます。もう片方の頂点でも同様 g と g' にします。

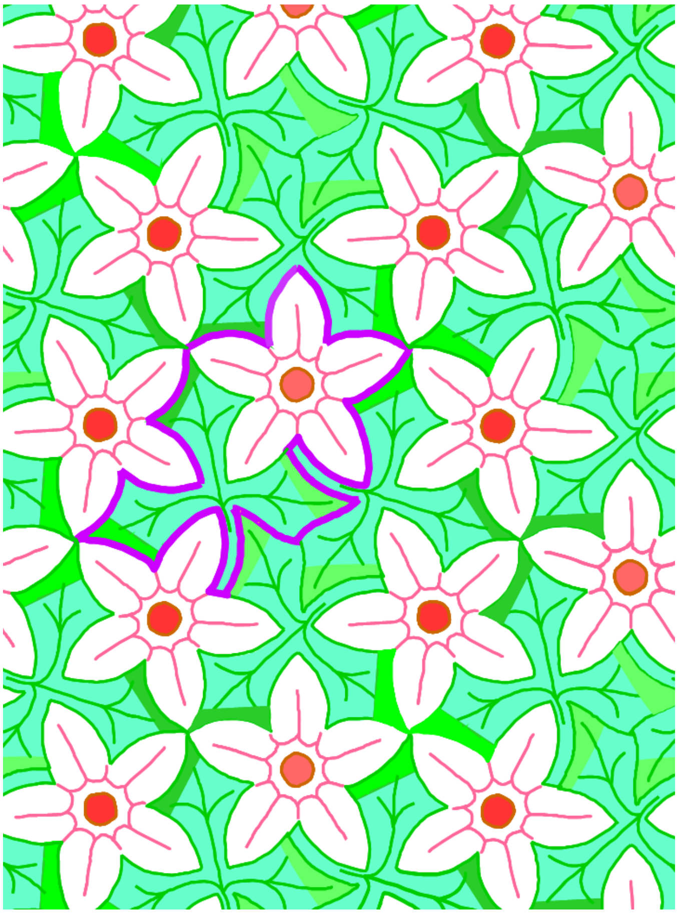


4 つの曲線で囲まれた領域は基本領域です。

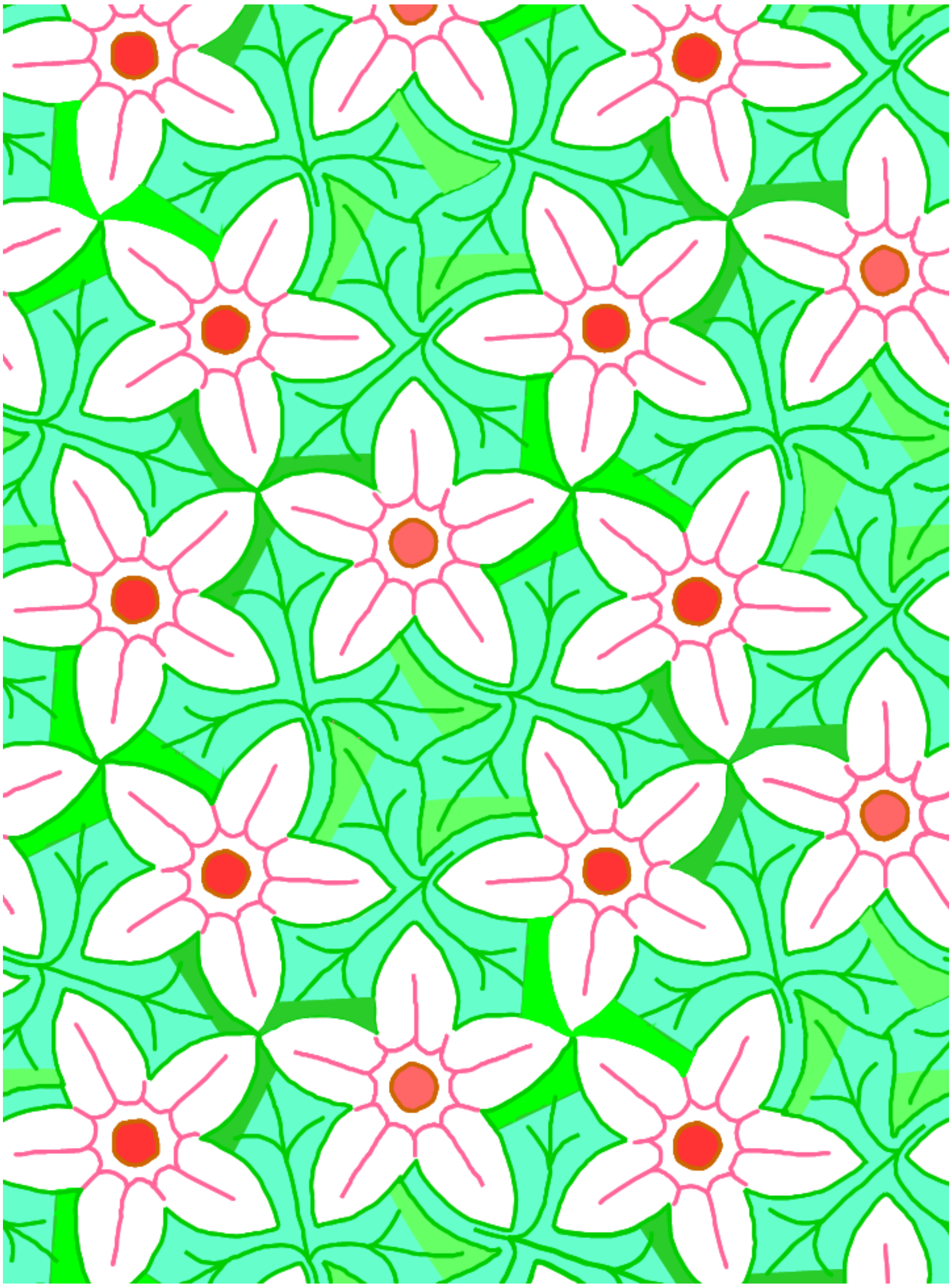


4つの曲線として、エッシャー文様の一枚の葉っぱと一輪の花の輪郭をとることができます。



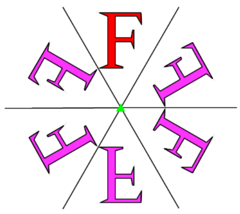


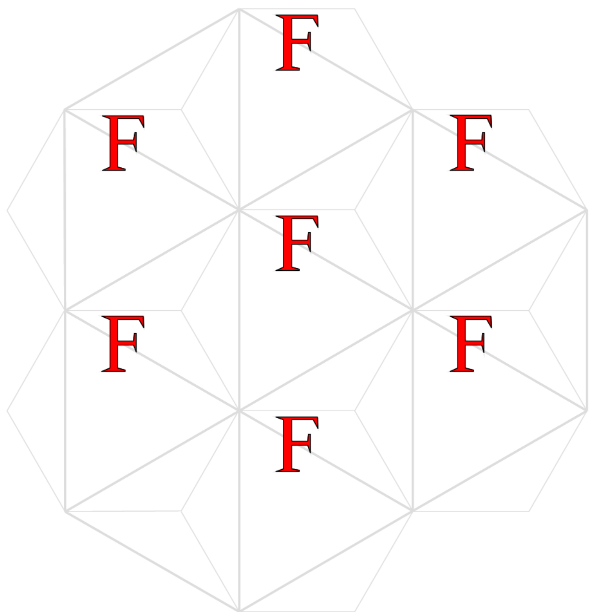
$p3$ に属するエッシャー文様をご覧ください。



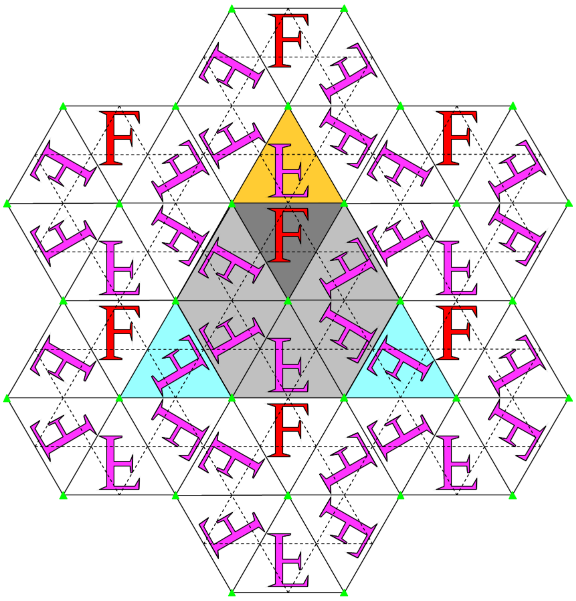
9　三角格子：「$p3m1$」（高智輝）

$p3m1$ は三角格子をもち、一つの鏡映（m）と $\frac{2\pi}{3}$ 回転（3）からつくられます。その鏡映軸は三角格子の辺と平行か垂直です。似た名前の $p31m$ の場合は三角格子の辺と平行な鏡映を含みます。三角格子の辺と垂直な鏡映を含むものを考えましょう。回転は鏡映軸の回転を導き、したがって、鏡映軸はどこかで交わり、下図左のような三重交差をつくります。





それを三角格子の作用で並べると、$p3m1$ 文様が得られます。



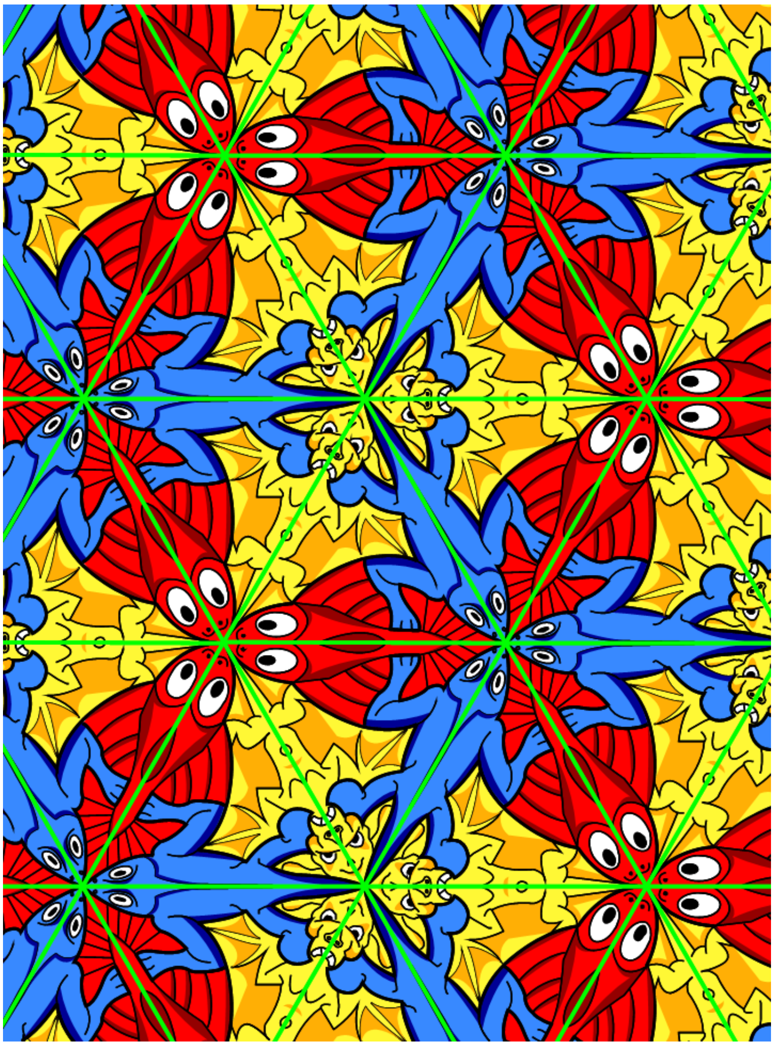
三角格子の、六角形の基本領域の各辺も鏡映軸になり、鏡映軸の交差はすべて三重交差になります。さらに、それは $\frac{2\pi}{3}$ 回転の中心になります。また、平行な鏡映軸の中間には滑り鏡映軸がはさまります。

鏡映軸で囲まれた F のまわりの下にとがった正三角形が $p3m1$ の基本領域になります。ここで、この基本領域の 3 辺に関する鏡映だけで、$p3m1$ のすべての合同変換が表されることを示しましょう。m_1 を水平な辺を鏡映軸とする鏡映、m_2、m_3 を左回りに、それぞれ、斜辺を鏡映軸とする鏡映とします。m_2、m_3 を続けて作用させると、F の右の裏 F を、F の左の裏 F に移しますから、六角形の $\frac{2\pi}{3}$ 回転になります。その結果、m_2 と m_3 の組み合わせで六角形のすべての F が得られます。

さらに、m_1 は F を上の黄色の裏 F に移します。それを回転すると、水色の裏 F が得られます。したがって、m_1、m_2、m_3 を組み合わせることで、F の真下の裏 F を黄色の裏 F に移すことができます。また、同様に、F の左右の裏 F を水色の裏 F に移すこともできます。これより、三角格子の平行移動も m_1、m_2、m_3 の組み合わせで得られることが分かります。

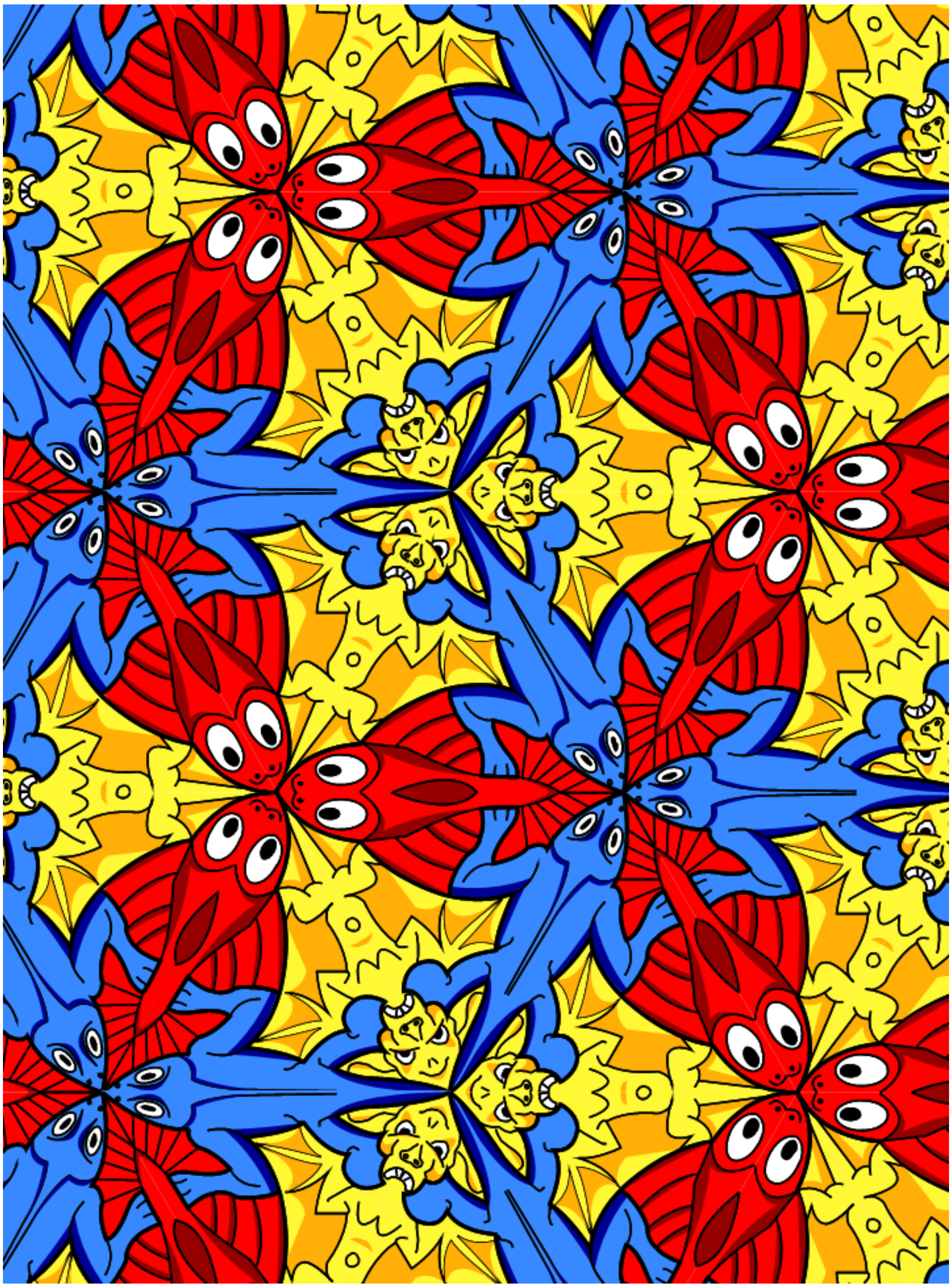
これにより、元の F から、六角形の任意の F に移ることができ、元の六角形から、任意の六角形に移ることができることになり、すべての F に行けることが分かりました。すなわち、$p3m1$ も鏡映群であることが示されました。

鏡映群の基本領域は鏡映軸に囲まれた一区画で、変形できません。エッシャー文様は辺に対応する左右対称の領域でつくられることになります。
$p3m1$ に属するエッシャー文様です。



その基本領域です。

$p3m1$ に属するエッシャー文様をご覧ください。

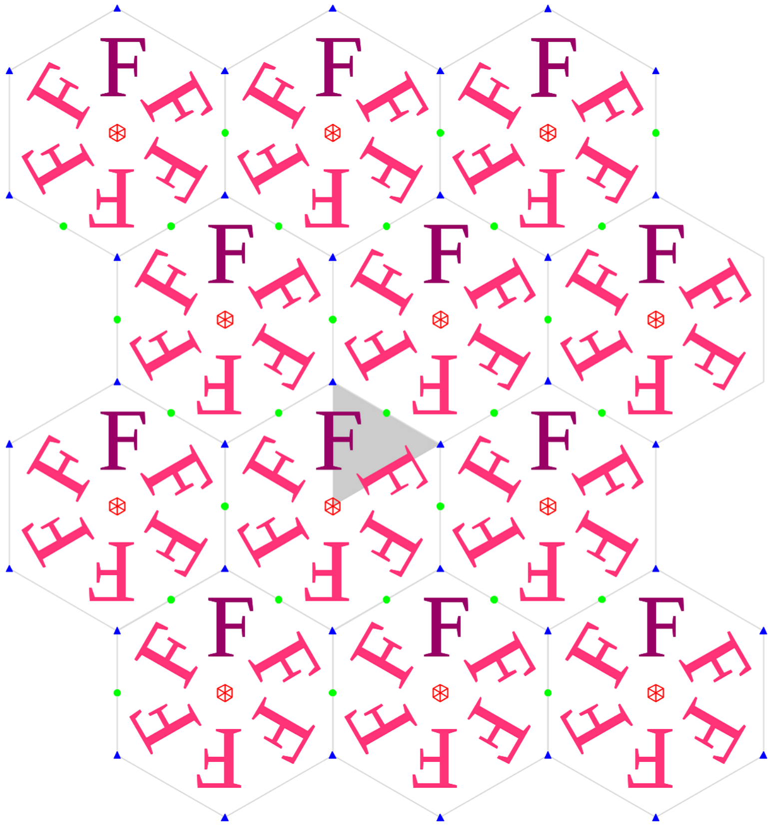


図柄は赤い金魚と青いトカゲと黄色い悪魔です。ぴたりとはまっています。悪魔の顔に注目してください。上下逆に見ると阿修羅の顔に見えます。

10　三角格子：「$p6$」（吉田知世）

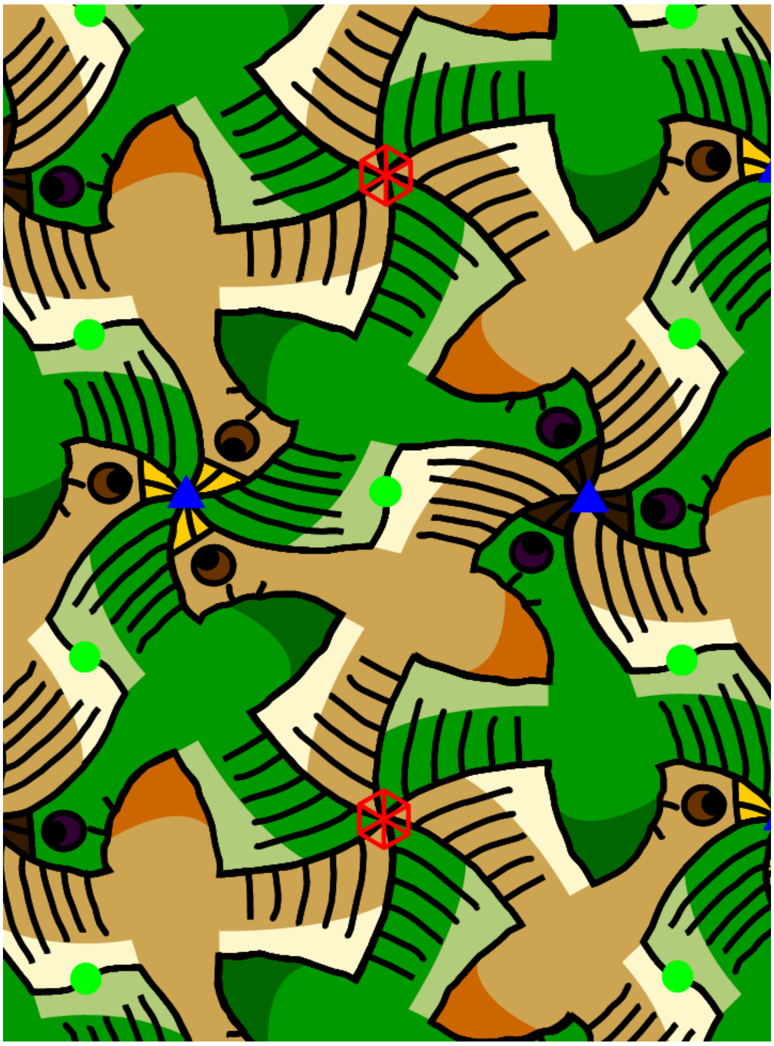
三角格子は $\frac{\pi}{3}$ 回転で不変ですから、$\frac{\pi}{3}$ 回転を含む壁紙群があります。それが $p6$ です。ある点を中心とする $\frac{\pi}{3}$ 回転は 6 つの F からなる形を作ります。

それを三角格子の作用で並べると、$p6$ 文様が得られます。

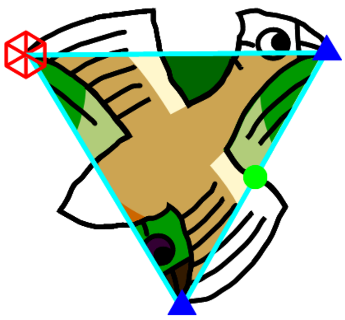


三角格子の基本領域の六角形の中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転の中心、頂点に $\frac{2\pi}{3}$ 回転の中心、辺の中点に点対称中心があります。

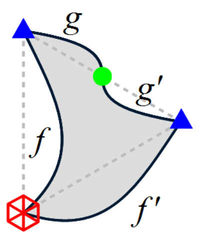
$p6$ に属するエッシャー文様です。



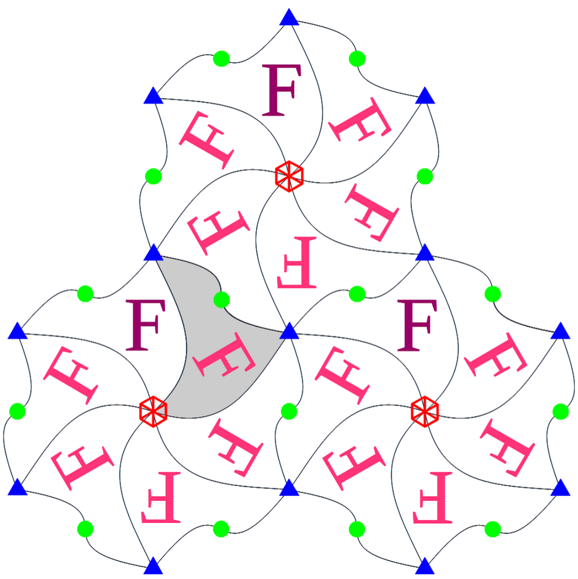
その基本領域です。



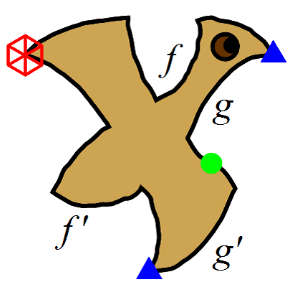
基本領域の変形を考えます。元の基本領域は正三角形です。1 つの頂点は $\frac{\pi}{3}$ 回転の中心で、その他の頂点は $\frac{2\pi}{3}$ 回転の中心です。それらを結ぶ辺の中点は点対称の中心です。$\frac{\pi}{3}$ 回転の中心の頂点をはさむ 2 辺を $\frac{\pi}{3}$ 回転で移り合う 2 曲線 f と f' で置き換えます。残った 1 辺を点対称な曲線 g と g' で置き換えます。



4 つの曲線で囲まれた領域は基本領域です。



1 羽の鳥は基本領域になります。

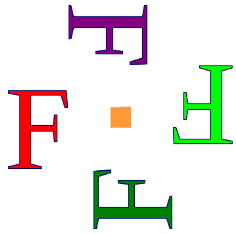


$p6$ に属するエッシャー文様をご覧ください。

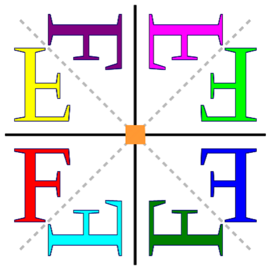
11　正方格子：「$p4g$」（小林航平）

正方格子を不変にする鏡映は、自然な正方形の基本領域に対して、辺の方向の鏡映軸をもつものと、対角線方向の鏡映軸をもつものの二種類があります。対角線方向のものだけを含むような壁紙群を考えてみましょう。正方格子ですから、当然、$\frac{\pi}{2}$ 回転を含みます。そのようなものは存在し、$p4g$ というものです。考えやすくするために、鏡映軸の方向を x 軸とします。正方格子は斜めの $(1,1)$ 方向を一辺とする基本領域をもちます。

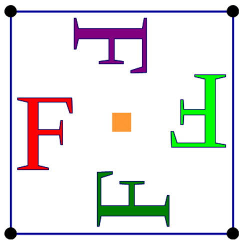
どこかに $\frac{\pi}{2}$ 回転の中心がありますから、その近くに F を置けば



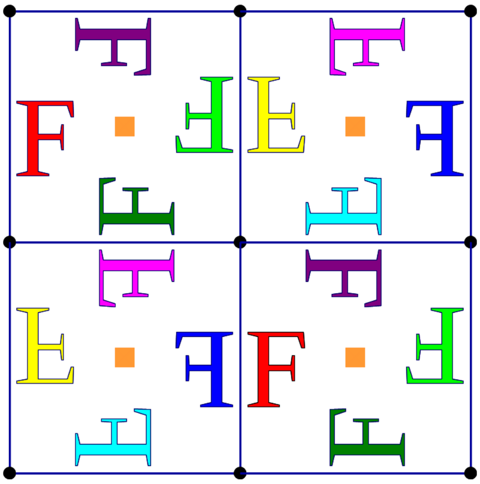
という形を含みます。また同時に、どこかに x 軸方向の鏡映軸があります。それが $\frac{\pi}{2}$ 回転の中心を含むかどうかですが、含むと



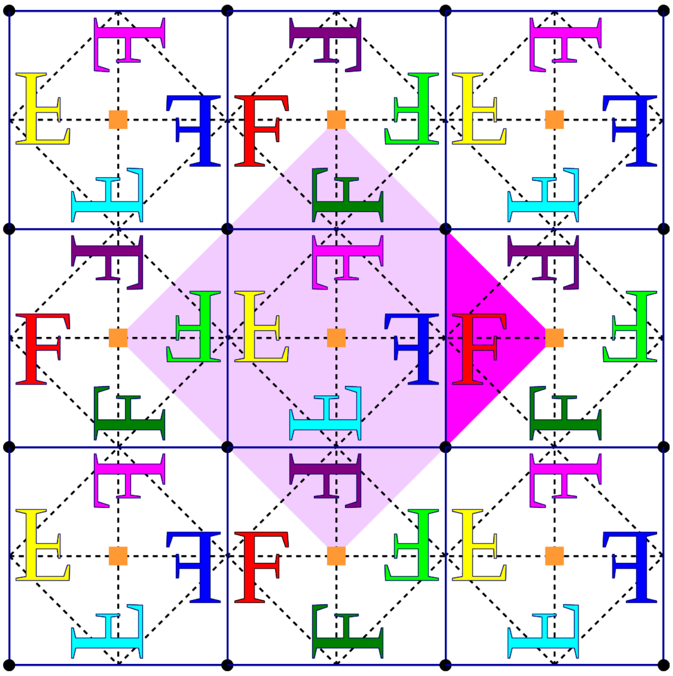
という形を含み、$(1,1)$ 方向の鏡映軸をもつことになり、はじめの仮定に矛盾します。したがって、鏡映軸は回転中心を含まないことになります。すると、鏡映軸も $\frac{\pi}{2}$ 回転の作用を受けますから、4 つの F の形は鏡映軸に囲まれることになります。



実際に鏡映を作用させると

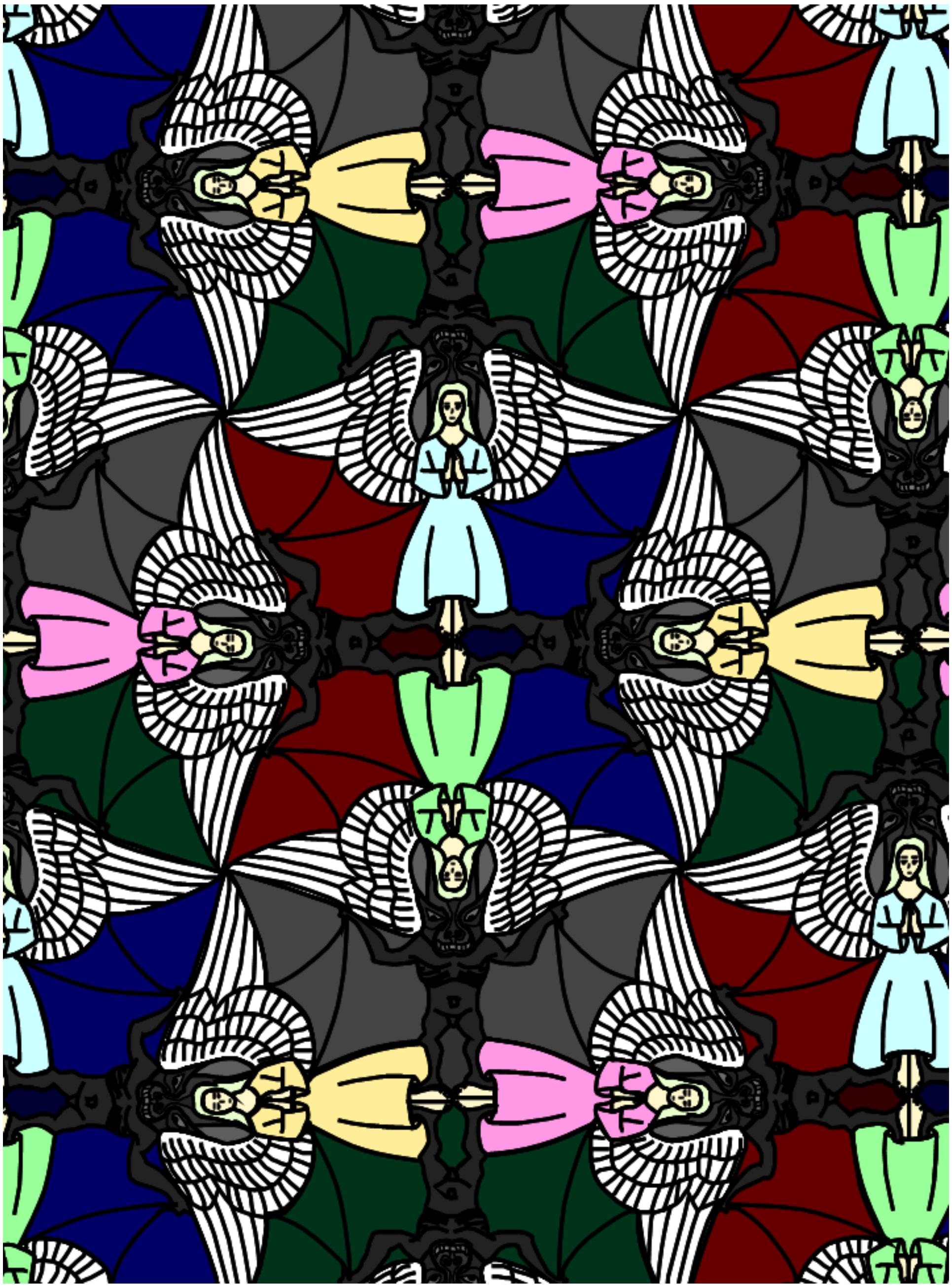


が得られて、後はこれの繰り返しです。正立の F を見ると、斜めの正方格子をもつことが分かります。このようにして $p4g$ が構成できました。

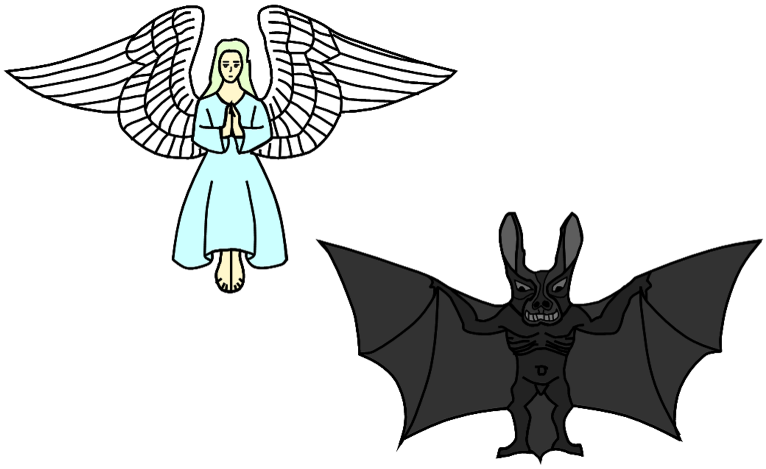


図で示した位置に滑り鏡映軸があります。薄いピンクの正方形は正方格子の基本領域です。濃いピンクの二等辺三角形は $p4g$ の基本領域を示します。

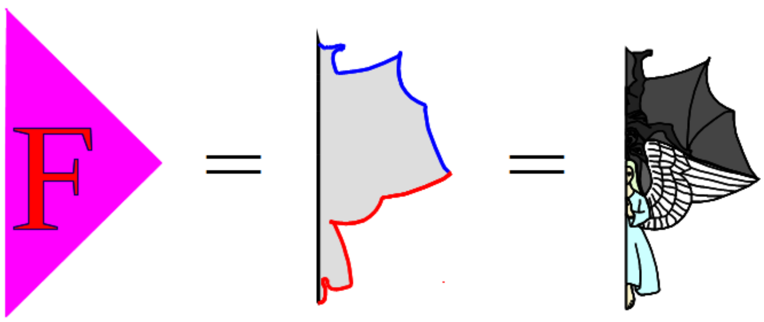
$p4g$ に属するエッシャー文様をご覧ください。



この文様は天使と悪魔からできています。



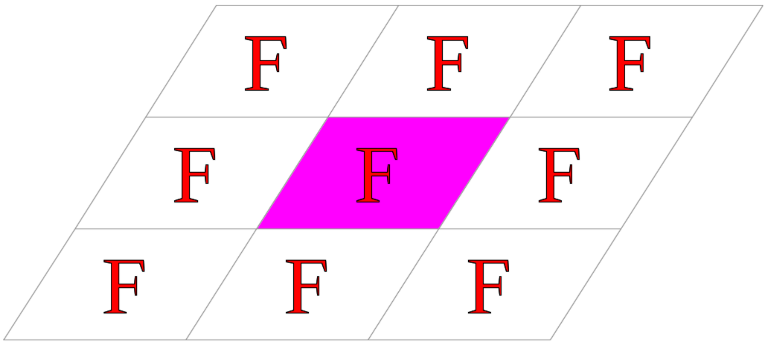
いずれも線対称で、この２つを合わせて、対称軸で切ったものが基本領域になっています。



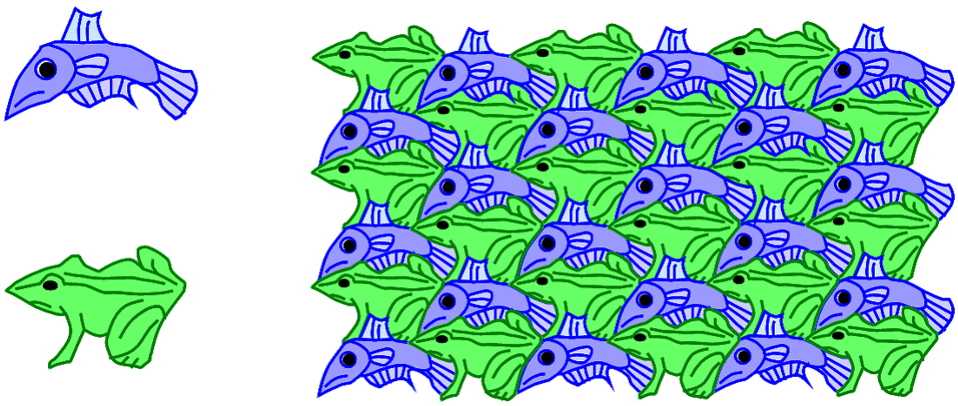
12　その他の壁紙群（小林航平）

12.1　「$p1$」

壁紙群としての一般格子は $p1$ と呼ばれています。

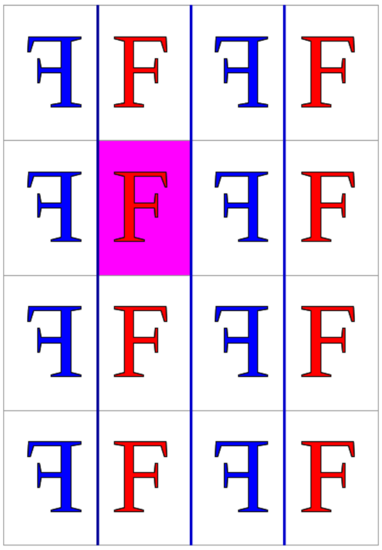


$p1$ に属するエッシャー文様です。

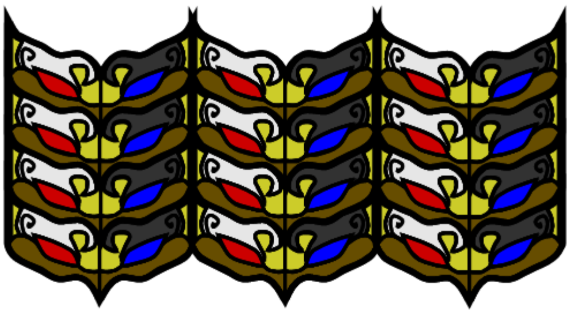


12.2 「pm」

等間隔の平行な鏡映軸だけからなる壁紙群です。

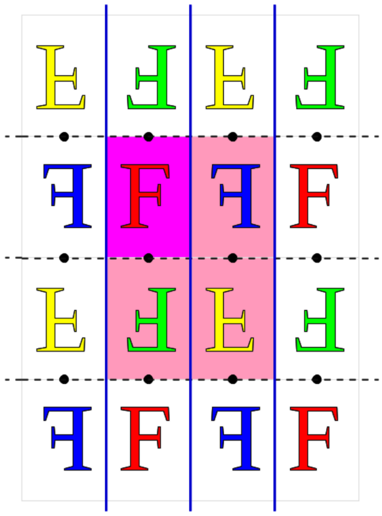


オリジナルなエッシャー文様をつくってみました。ベネチア風マスクです。



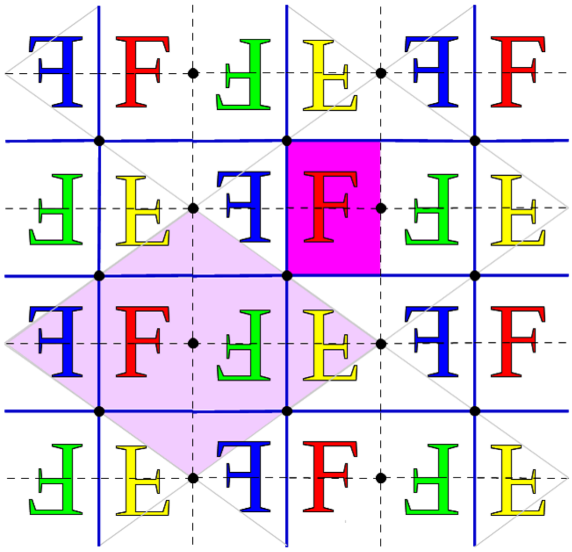
12.3 「pmg」

pmg は pm の F のところに点対称図形を入れたものです。

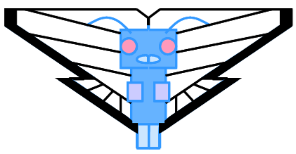


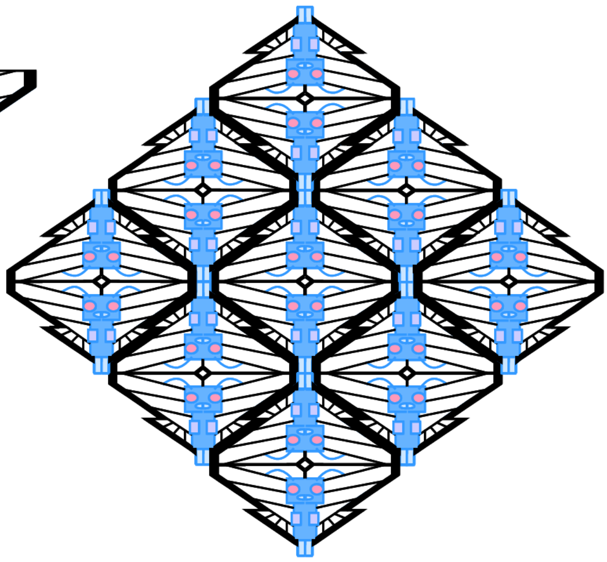
12.4 「cmm」

cmm は pmm の F のところに点対称図形を入れたものです。菱形格子をもちます。



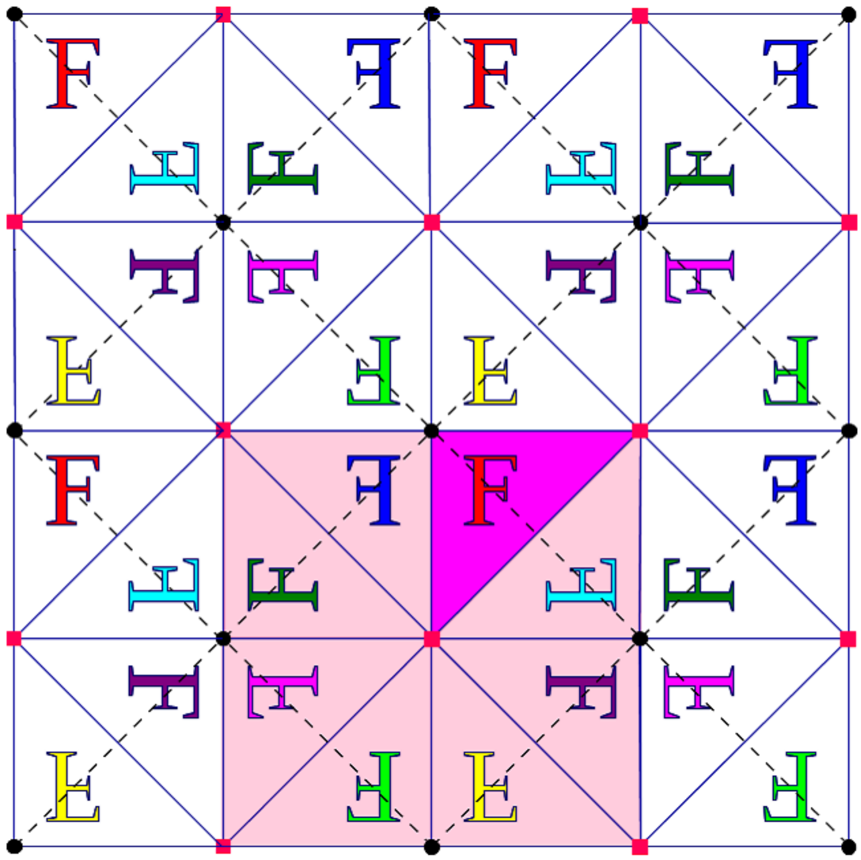
オリジナルなエッシャー文様をつくってみました。ロボット蛾です。





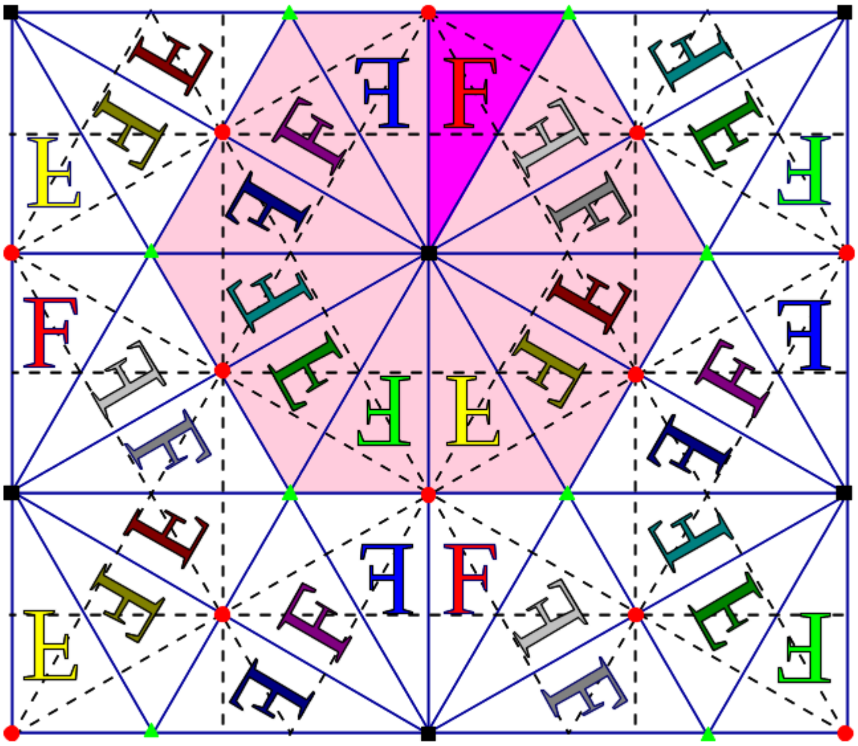
12.5 「$p4m$」

$p4m$ は直角二等辺三角形の 3 辺に関する鏡映から生成される鏡映群です。正方格子をもちます。



12.6　「$p6m$」

$p6m$ は $\dfrac{\pi}{3}$ の角をもつ直角三角形の 3 辺に関する鏡映から生成される鏡映群です。三角格子をもちます。



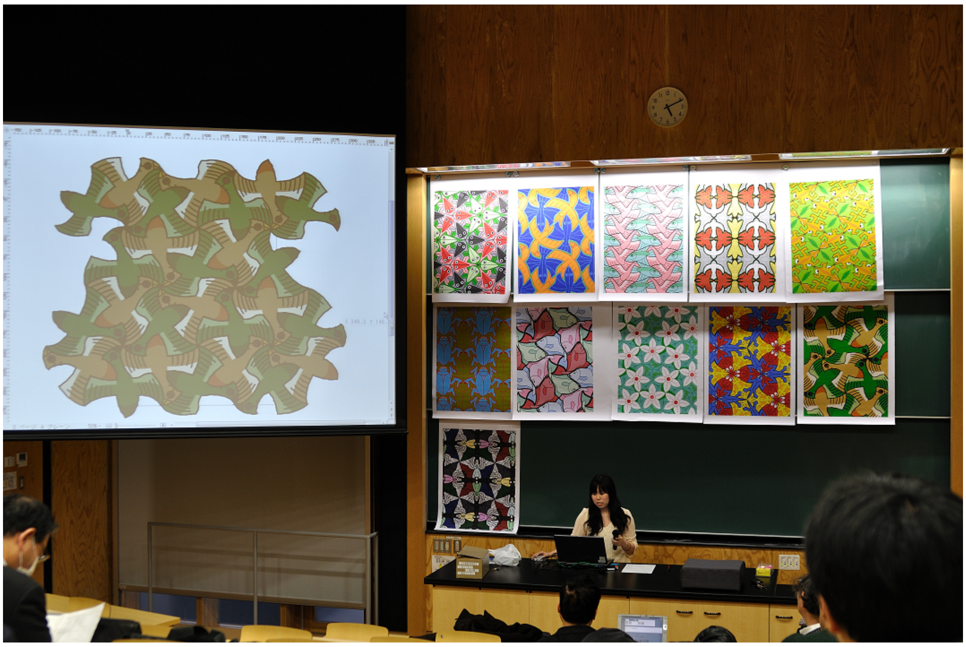
参考文献

杉原厚吉「エッシャー・マジック　だまし絵の世界を数理で読み解く」東京大学出版会（2011 年）ISBN978-4-13-063355-0

C．H．マックギラフィ（訳：有馬朗人）「エッシャー<シンメトリーの世界>」サイエンス社（1980 年）ISBN 978-4-7819-0019-3


15:55


15:55から
再開




スイッチ、OFF!