位相空間

川崎徹郎

2016 春

1 位相空間

位相空間とは，その上に開集合が与えられているような集合である。ただし，開集合は下に述べる公理を満たすものとする。開集合とは，ある点を含めば，その近くの点を含む，という性質を持つ集合のことであるが，ここではそのような性質を忘れて，ただ，共通部分と合併集合に関する性質のみを取り上げて，それだけを議論の出発点とする。それだけで十分なことは，多くの経験を積まないと納得できないかもしれないが，数学者たちは，歴史的な経験を積むことにより，それで十分であると体感している。

定義 (開集合の公理) 集合 X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ が次の 3 つの条件

(O1) $X \in \mathcal{O},\ \emptyset \in \mathcal{O}$

(O2) $\mathcal{O}$ に属する有限個の集合の共通部分は $\mathcal{O}$ に属する。

(O3) $\mathcal{O}$ に属する任意個の集合の合併集合は $\mathcal{O}$ に属する。

を満たすとき，$\mathcal{O}$ を X の**位相**といい，位相の定まった集合 $(X, \mathcal{O})$ を**位相空間**という。$\mathcal{O}$ に属する集合を X の**開集合**という。X の元を**点**という。

条件 (O1), (O2), (O3) を開集合の公理ということがある。開集合の公理は開集合を定めるものではない。何かの理由で定まっている開集合が，開集合としてふさわしい性質を持っているかを判定する基準である。

(O2)，(O3) を記号と式を用いて表すと次のようになる。

(O2) $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O} \Rightarrow \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathcal{O}$

(O3) $U_\lambda \in \mathcal{O}(\forall\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$

形式論理を厳密にあてはめると，0 個の集合の共通部分は全体集合 X であることと，0 個の集合の合併集合は空集合 $\emptyset$ であることが導かれる。したがって，(O2) において，$n = 0$ の場合は 0 個の開集合の共通部分になり，それは全体集合 X であるから，$X \in \mathcal{O}$ が導かれる。また，(O3) において，$\Lambda = \emptyset$ の場合は 0 個の開集合の合併集合になり，それは $\emptyset$ であるから，$\emptyset \in \mathcal{O}$ が導かれる。したがって，開集合の公理において (O1) は省略してもよい。

例 1.1 $[X, d]$ を距離空間とする。

$$\mathcal{O}(d) = \{U \subset X \mid \forall p \in U, \exists\varepsilon > 0; N_\varepsilon(p) \subset U\}$$

とおけば，$\mathcal{O}(d)$ は (O1), (O2), (O3) を満たす。

証明　“(O1)”　$\mathcal{O}(d)$ の定義より明らか。

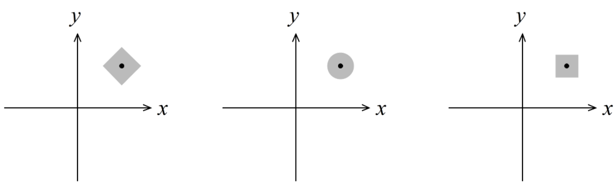
“(O2)”　2 個の場合を示せば十分である。$U_1, U_2 \in \mathcal{O}(d)$ とし，$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}(d)$ を示す。$p \in U_1 \cap U_2$ とすると $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2$ について $N_{\varepsilon_1}(p) \subset U_1, N_{\varepsilon_2}(p) \subset U_2$ が成り立つ。そこで $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと $N_\varepsilon(p) \subset U_1 \cap U_2$ である。よって $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}(d)$ となる。

“(O3)”　$U_\lambda \in \mathcal{O}(d)$ とし，$\bigcup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{O}(d)$ を示せばよい。$p \in \bigcup_\lambda U_\lambda$ とすると，ある λ に対し $p \in U_\lambda$ である。U_λ は開集合であるから，ある $\varepsilon > 0$ に対し $N_\varepsilon(p) \subset U_\lambda$ が成り立つ。そのとき $N_\varepsilon(p) \subset \bigcup_\lambda U_\lambda$ となる。■

例 1.2 平面 $\mathbb{R}^2$ において，距離 d_1, d_2, d_∞ を，$\mathrm{P}(x_1, x_2), \mathrm{Q}(y_1, y_2)$ に対して

$$\begin{aligned} d_1(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ d_2(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ d_\infty(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) &= \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \end{aligned}$$

と定めることができる。それぞれの ε 近傍は



となるが，このとき

$$\mathcal{O}(d_1) = \mathcal{O}(d_2) = \mathcal{O}(d_\infty)$$

である。

証明　簡単な計算で

$$d_\infty(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \leqq d_2(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \leqq d_1(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \leqq 2d_\infty(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$$

が分かる。したがって，それぞれの ε 近傍を $N^1_\varepsilon(\mathrm{P}), N^2_\varepsilon(\mathrm{P}), N^\infty_\varepsilon(\mathrm{P})$ で表すと

$$N^\infty_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathrm{P}) \subset N^1_\varepsilon(\mathrm{P}) \subset N^2_\varepsilon(\mathrm{P}) \subset N^\infty_\varepsilon(\mathrm{P})$$

が成り立つ。よって

“U は $[\mathbb{R}^2, d_\infty]$ で開”$\Rightarrow$“U は $[\mathbb{R}^2, d_2]$ で開”
$\Rightarrow$“U は $[\mathbb{R}^2, d_1]$ で開”$\Rightarrow$“U は $[\mathbb{R}^2, d_\infty]$ で開”

である。■

次の 2 つの例は，幾何的には意味がないが，集合論的には重要な位相である。

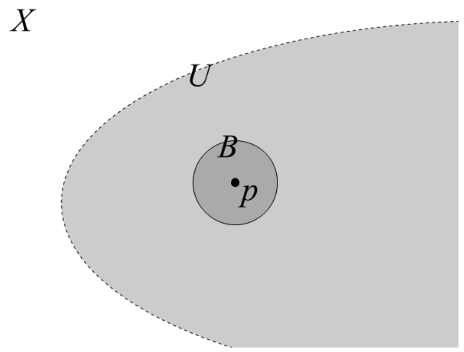
例 1.3 (離散位相) $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ は開集合の公理を満たす。すなわち，すべての部分集合が開集合のときである。各点がバラバラの孤立点と考えられ，**離散位相**といわれる。

例 1.4 (密着位相) $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ は開集合の公理を満たす。すなわち，空集合，全体集合以外の開集合のないときである。すべての点が硬くくっついた状態と考えられ，**密着位相**といわれる。

すべての開集合を一度に定めるのは困難なことが多い。十分細かい開集合だけを定めて，それらの合併集合として，その他の開集合を定めることができる。

定義 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開集合の族 $\mathcal{B}$ が**開基**である，または，位相の**基底**であるとは，任意の開集合 U が $\mathcal{B}$ に属する集合の合併集合で表されるときである。

定理 1 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開集合の族 $\mathcal{B}$ が開基である必要十分条件は，任意の開集合 U とその任意の点 $p \in U$ に対して，$p \in B \subset U$ となるような，$\mathcal{B}$ に属する集合 B が存在することである。



証明 "⇒" $\mathcal{B}$ を開基とする。開集合 $U \subset X$ に対して，$\mathcal{B}$ に属する開集合 B_λ で $U = \bigcup_\lambda B_\lambda$ となるものがある。したがって，$p \in U$ に対して $p \in B_\lambda$ となる λ がある。$p \in B_\lambda \subset U$ である。

"⇐" $\mathcal{B}$ が条件を満たすものとする。開集合 $U \subset X$ の各点 p に対して，$p \in B_p \subset U$ となるような，$\mathcal{B}$ に属する集合 B_p が存在する。$p \in U$ が動くときの B_p 全体の合併集合 $\bigcup_p B_p$ は U と一致する。■

問 1.5 定理 1 の条件は，一般の集合族 $\mathcal{B}$ に対し，一般の集合 U が，$\mathcal{B}$ に属する集合いくつかによる合併集合で表されるための必要十分条件を与えていることを示せ。

例 1.6 (X,d) を距離空間とするとき，ε 近傍の全体

$$\mathcal{B}(d)=\{N_\varepsilon(p)\mid p\in X,\varepsilon>0\}$$

は位相 $\mathcal{O}(d)$ の開基である。

証明 集合族 $\mathcal{B}(d)$ に関する，定理 1 の条件は，部分集合 U に関する，距離空間における開集合の条件である。■

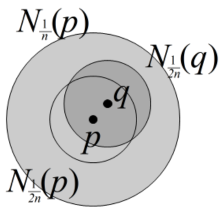
上の議論で，すべての ε 近傍を取る必要はない。すべての自然数 n に対する $\dfrac{1}{n}$ 近傍だけ（あるいは $\dfrac{1}{2^n}$ 近傍だけ）で十分である。

$$\mathcal{B}_0=\left\{N_{\frac{1}{n}}(p)\,\middle|\,p\in X,n\in\mathbb{Z}^+\right\}$$

例 1.7 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の時は，さらに少ない開基を選ぶことができる。上の例では，$\dfrac{1}{n}$ 近傍の中心はすべての $p\in X$ を動くが，$\mathbb{R}^n$ ではすべて座標が有理数の点だけを動いたもので十分である。

$$\mathcal{B}_{00}=\left\{N_{\frac{1}{k}}(q)\,\middle|\,q=(q_1,q_2,\ldots,q_n)\in\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{Z}^+,q_i\in\mathbb{Q},i=1,2,\ldots,n\right\}$$

証明 実際，開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ と点 $p\in U$ に対して，p の $\dfrac{1}{n}$ 近傍で U に含まれるものを選び，さらに，p の $\dfrac{1}{2n}$ 近傍から，すべての座標が有理数の点 q を選ぶことができる。すると，q の $\dfrac{1}{2n}$ 近傍 $N_{\frac{1}{2n}}(q)$ は p を含み，p の $\dfrac{1}{n}$ 近傍に含まれ，したがって，U に含まれる。■



このとき，$\mathcal{B}_{00}$ の元の個数，すなわち，$\mathcal{B}_{00}$ に属する集合の個数は可算である。

このように，位相空間 X が高々可算濃度の開基をもつとき，**第 2 可算公理**を満たすという。第 2 可算公理を満たす位相空間の位相の濃度（開集合の個数）は高々連続濃度である。

ユークリッド空間の部分集合の個数は連続濃度より大きい。開集合の個数は連続濃度であるから，部分集合のうちのごく一部だけが開集合であるといえる。

例 1.8 数直線 $\mathbb{R}$ の開集合は互いに交わらない可算個の開区間の和集合である。

証明 $U \subset \mathbb{R}$ を開集合とする。第 2 可算公理より，U は可算個の開区間の和集合で表すことができる。

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

ここで，$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ に同値関係 $\sim$ を次のように定めることができる。

$$\begin{aligned} & k \sim l \\ & \iff \exists k_0, k_1, \dots, k_N;\ k = k_0, l = k_N, I_{k_{i-1}} \cap I_{k_i} \neq \emptyset\ (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

$\mathbb{N}$ を $\sim$ による同値類に分ける。

$$\mathbb{N} = \begin{cases} N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_M & （有限個） \\ N_1 \cup N_2 \cup \dots & （無限個） \end{cases}$$

各 N_i に対し，J_i を $J_i = \displaystyle\bigcup_{k \in N_i} I_k$ とおけば，J_i は開区間で

$$U = \begin{cases} J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_M & （有限個） \\ J_1 \cup J_2 \cup \dots & （無限個） \end{cases}$$

である。■

定理 2 (開基の公理) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開基 $\mathcal{B}$ は次の性質を満たす。

(B1) $\displaystyle\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$

(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ に対し，$p \in B_1 \cap B_2$ ならば，ある $B \in \mathcal{B}$ で，$p \in B$ かつ $B \subset B_1 \cap B_2$ となるものがある。

証明 "(B1)" "$\subset$" は明らか。"$\supset$" を示す。$X \in \mathcal{O}$ であるから，X は $\mathcal{B}$ に属する集合（いくつかの）の合併集合で表される。

"(B2)" $B_1 \cap B_2$ は開集合である。したがって $p \in B_1 \cap B_2$ に対して，条件を満たす $B \in \mathcal{B}$ が存在する。■

以上が，位相の条件のうち，(O3) に関する議論である。少しだけ，(O2) に関することを付け加える。

定義 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の開集合の族 $\mathcal{SB}$ が**準基**であるとは，$\mathcal{SB}$ の有限個の共通部分全体

$$\{S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n \mid S_i \in \mathcal{SB}, i = 1, 2, \dots, n, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

が $(X, \mathcal{O})$ の開基になるとき。ただし $n = 0$ のとき，集合論の約束から，0 個の共通部分は全体集合 X である

例 1.9 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において，半径 1 の開球体全体

$$\mathcal{SB} = \{\overset{\circ}{D}{}_1^n(p) \mid p \in \mathbb{R}^2\}$$

は位相 $\mathcal{O}(d)$ の準基である。

証明 点 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$ と $\varepsilon > 0$ に対して、十分小さい $\delta > 0$ を選ぶとき

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - (1-\delta)\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{p} + (1-\delta)\boldsymbol{e}_1$$

とおく（$\boldsymbol{e}_1$ は基本ベクトル）。すると，$\boldsymbol{p} \in \overset{\circ}{D}{}_1^n(\boldsymbol{p}') \cap \overset{\circ}{D}{}_1^n(\boldsymbol{p}'')$ である。ここで，$\boldsymbol{x} \in \overset{\circ}{D}{}_1^n(\boldsymbol{p}') \cap \overset{\circ}{D}{}_1^n(\boldsymbol{p}'')$ に対して，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}'\| \leqq 1$ であるが，これより

$$\begin{aligned} 1 &\geqq (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} - (1-\delta)\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} - (1-\delta)\boldsymbol{e}_1) \\ &= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|^2 + (1-\delta)^2 - 2(1-\delta)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_1) \end{aligned}$$

を得る。同様に，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}''\| \leqq 1$ より

$$1 \geqq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|^2 + (1-\delta)^2 + 2(1-\delta)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}, \boldsymbol{e}_1)$$

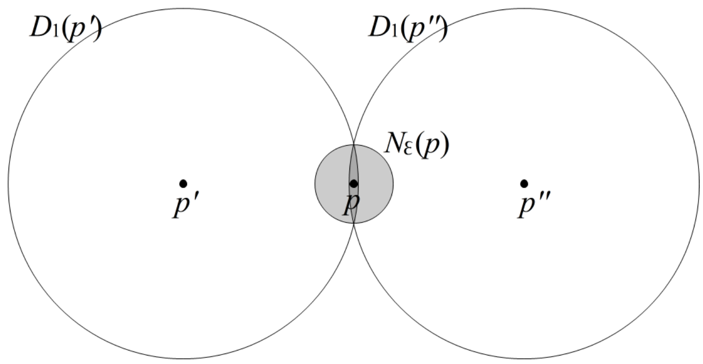
を得る。2 式を辺々加えて，整理すれば

$$4\delta - 2\delta^2 \geqq 2\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|^2$$

となる。これより，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| \leqq \sqrt{\delta(2-\delta)} < \sqrt{2\delta}$ が得られる。したがって，$0 < \delta \leqq \dfrac{\varepsilon^2}{2}$ とすれば

$$\boldsymbol{p} \in \overset{\circ}{D}{}_1^n(\boldsymbol{p}') \cap \overset{\circ}{D}{}_1^n(\boldsymbol{p}'') \subset N_\varepsilon(\boldsymbol{p})$$

である。■



準基に対して，基本的な操作，(O2)，(O3) だけですべての開集合が得られるわけで，準基は位相を生成するということができる。

• 開基または準基による位相の創成

今まで、位相（開集合）が与えられた状況で，開基および準基の議論をしてきたが，この節の最後の議論として，開基または準基だけを与えて位相を定めることを考えよう。

定理 3 集合 X の部分集合族 $\mathcal{B}$ が，開基の公理 (B1)，(B2) を満たすとき，$\mathcal{B}$ を開基とするような X 上の位相 $\mathcal{O}$ が存在する。

証明 $\mathcal{O}$ を $\mathcal{B}$ に属する集合（いくつかの）の合併集合全体のつくる集合族とする。$\mathcal{O}$ が (O1)，(O2)，(O3) を満たすことを示す。

(O3) は明らか。(O1) も (B1) より明らか。(O2) を示す。帰納法から，2 個の場合を示せば十分である。$U, V \in \mathcal{O}$ とすると

$$U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} B_\lambda,\ V = \bigcup_{\mu\in\Lambda_2} B_\mu \ \ (B_\lambda, B_\mu \in \mathcal{B})$$

と表せる。集合論を思い出すと

$$U \cap V = \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda_1} B_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_{\mu\in\Lambda_2} B_\mu\right) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda_1\times\Lambda_2} B_\lambda \cap B_\mu$$

であった。右辺の各成分について $B_\lambda \cap B_\mu \in \mathcal{O}$ を見ればよい。(B2) より，定理 1 の証明の後半と同じ議論が成立する。■

定理 4 集合 X の任意の部分集合族 $\mathcal{S}$ に対して，その有限個の共通部分全体を $\mathcal{B}$ とする。

$$\mathcal{B} = \{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \mid S_i \in \mathcal{S}, i = 1, 2, \ldots, n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

$\mathcal{B}$ の任意個の合併集合全体を $\mathcal{O}$ とする。すなわち，あらためて，$\mathcal{B} = \{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と表すとき

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} B_\lambda \,\middle|\, \Lambda' \subset \Lambda \right\}$$

である。そのとき，$\mathcal{O}$ は X 上の位相で，$\mathcal{S}$ はその準基，$\mathcal{B}$ はその開基である。

証明 $\mathcal{B}$ が開基の公理 (B1), (B2) を満たすことを示せばよい。集合論の約束から，0 個の共通部分は全体集合 X であるから，(B1) はよい。(B2) は $\mathcal{B}$ の定め方から明らかである。■

この定理より，準基の公理は無条件であること，すなわち，集合 X の，どのような部分集合族 $\mathcal{S}$ に対しても，X 上の位相 $\mathcal{O}$ で，$\mathcal{S}$ をその準基とするものが存在することがわかる。

問題

1.10 $X = \{1, 2, 3\}$ とする。

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$$

とおくと，$\mathcal{O}$ は X 上の位相であることを次の演算表を埋めることによって示せ。

(i) $U \cap V$:

$U \backslash V$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	X
$\emptyset$				
$\{1\}$				
$\{2,3\}$				
X				

(ii) $U \cup V$:

$U \backslash V$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	X
$\emptyset$				
$\{1\}$				
$\{2,3\}$				
X				

完成した表から直接示されることは何か。それを用いて，$\mathcal{O}$ が開集合の公理を満たすことを導け。

1.11 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。

$$\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$$

とおく。$\mathcal{B}$ は開基の公理を満たすことを確かめ，$\mathcal{B}$ を開基とする X 上の位相 $\mathcal{O}$ を求めよ。

1.12 (i) 数直線上で

$$\mathcal{O} = \{(t, \infty) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

は開集合の公理を満たす。

(ii) 数直線上で

$$\mathcal{O}' = \{[t, \infty) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

は開集合の公理を満たさない。

1.13 X を無限集合とする。

(i) X の部分集合族

$$\mathcal{O} = \{X - A \mid A \text{ は } X \text{ の有限部分集合 }\} \cup \{\emptyset\}$$

は開集合の公理を満たす。

(ii) X の部分集合族

$$\mathcal{S} = \{X - \{a\} \mid a \in X\}$$

は位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の準基である。

1.14 X を非可算集合とする。

(i) X の部分集合族

$$\mathcal{O} = \{X - A \mid A \text{ は } X \text{ の可算部分集合 }\} \cup \{\emptyset\}$$

は開集合の公理を満たす。

(ii) X の部分集合族

$$\mathcal{O} = \{X - A \mid A \text{ は } X \text{ の可算無限部分集合 }\} \cup \{\emptyset\}$$

は開集合の公理を満たさない。

2 基本近傍系

ある点に対して，その点の十分近くの点をすべて含む集合を，その点の近傍という。位相は各点の近傍を定める。また，各点の近傍を指定することにより，開集合を定めることができる。それは，距離空間に対して，ε 近傍が開集合を定めたのと同様な考え方である。

定義 (近傍) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。X の部分集合 N が点 $p \in X$ の**近傍**であるとは， p を含み，N に含まれる開集合 U が存在するとき。

$$p \in U \subset N,\ U \in \mathcal{O}$$

特に，p を含む開集合はすべて，p の近傍である。点 p の**開近傍**という。

定理 5 部分集合 $U \subset X$ が開集合である必要十分条件は，U の各点 p に対して，U に含まれる p の近傍が存在することである。

証明 "$\Rightarrow$" $U \subset X$ が開集合だとすると，どの $p \in U$ に対しても，U は p の近傍である。

"$\Leftarrow$" $U \subset X$ が上の条件を満たすものとする。各 $p \in U$ に対して，条件を満たす近傍 N を選び，$N_p = N$ と定める。さらに，N_p は p の近傍であるから，開集合 O_p を $p \in O_p \subset N_p$ を満たすように選ぶ。すると，各 $p \in U$ に対して，$p \in O_p \subset U$ であるから

$$U = \bigcup_{p \in U} O_p$$

が成り立つ。■

定義 (基本近傍系) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の各点 $p \in X$ に対し，その近傍の集まり $\mathcal{N}(p)$ が**基本近傍系**であるとは，p を含む任意の開集合 U に対し，U に含まれる $N \in \mathcal{N}(p)$ が存在するとき。

$$p \in N \subset U$$

例 2.1 距離空間 (X, d) では点 p の ε 近傍全体

$$\mathcal{N}(p) = \{N_\varepsilon(p) \mid \varepsilon > 0\}$$

は基本近傍系である。すべての $\varepsilon > 0$ でなく，$\dfrac{1}{n}$ 近傍 $(n = 1, 2, \ldots)$ だけでもよい。

このように，位相空間 X の各点が高々可算濃度の基本近傍系をもつとき，**第 1 可算公理**を満たすという。距離空間は第 1 可算公理を満たす。

例 2.2 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\mathcal{B}$ をその開基とすると

$$\mathcal{N}(p) = \{B \in \mathcal{B} \mid p \in B\}$$

は基本近傍系である。したがって，第 2 可算ならば第 1 可算である。

例 2.3 基本近傍系は開集合でなくてもよい。例えば

$$\mathcal{N}(p) = \left\{N_{\leqq\varepsilon}(p) \mid \varepsilon > 0\right\} \qquad \left(\text{ただし } N_{\leqq\varepsilon}(p) = \{q \in X \mid d(p,q) \leqq \varepsilon\}\right)$$

は基本近傍系である。

基本近傍系 $\mathcal{N}(p)$ が与えられると，U が開集合であることは

$$\text{“}\forall p \in U, \exists N \in \mathcal{N}(p); N \subset U\text{”}$$

により定まる。

定理 6 (基本近傍系の公理) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とするとき，基本近傍系 $\mathcal{N}(p)$ は次の性質を持つ。

(N1) $\mathcal{N}(p) \neq \emptyset$ で $N \in \mathcal{N}(p)$ ならば $p \in N$ である。

(N2) $N_1, N_2 \in \mathcal{N}(p)$ に対し，$N_3 \in \mathcal{N}(p)$ で $N_3 \subset N_1 \cap N_2$ となるものがある。

(N3) $N_1 \in \mathcal{N}(p)$ に対して，十分小さい $N_2 \in \mathcal{N}(p)$ を選べば，任意の $q \in N_2$ に対して，$N_3 \in \mathcal{N}(q)$ で $N_3 \subset N_1$ となるものがある。

証明 “(N1)” X は開集合であるから，ある $N \in \mathcal{N}(p)$ で $N \subset X$ とできる。よって，$\mathcal{N}(p) \neq \emptyset$ である。また，$N \in \mathcal{N}(p)$ とすると $p \in N$ は明らか。

“(N2)” $N_1, N_2 \in \mathcal{N}(p)$ とすると $p \in U_1 \subset N_1$，$p \in U_2 \subset N_2$ となる開集合 U_1, U_2 が存在する。そして，$p \in U_1 \cap U_2 \subset N_1 \cap N_2$ である。$U_1 \cap U_2$ は開集合であるから，よって $N_3 \in \mathcal{N}(p)$ で $N_3 \subset U_1 \cap U_2 \subset N_1 \cap N_2$ とすることができる。

“(N3)” $N_1 \in \mathcal{N}(p)$ とすると，$p \in U_1 \subset N_1$ となる開集合 U_1 が存在する。よって，十分小さい $N_2 \in \mathcal{N}(p)$ を選べば $N_2 \subset U_1$ である。そのとき，$q \in N_2$ について $q \in U_1$ であるから，$N_3 \in \mathcal{N}(q)$ で $N_3 \subset U_1 \subset N_1$ とすることができる。 ■

● 基本近傍系による位相の創成

基本近傍系の公理 (N1), (N2), (N3) を満たす部分集合族 $\mathcal{N}(p)$ のみを与えて，それらを基本近傍系とする位相を定めることができる。

定理 7 集合 X の各元 $p \in X$ に対し，部分集合族 $\mathcal{N}(p)$ が定まっていて，基本近傍系の公理 (N1), (N2), (N3) を満たすとき，$\mathcal{N}(p)$ を基本近傍系とするような X 上の位相 $\mathcal{O}$ が定まる。

証明　X の部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid \forall p \in U, \exists N \in \mathcal{N}(p); N \subset U\}$$

とおく。$\mathcal{O}$ が位相であることを示そう。(O1), (O2), (O3) を見ればよい。

"(O1)"　$\emptyset \in \mathcal{O},\ X \in \mathcal{O}$ は明らか。

"(O2)"　$U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ とする。$p \in U_1 \cap U_2$ とすると，$p \in U_1, p \in U_2$ より，$N_1, N_2 \in \mathcal{N}(p)$ で $N_1 \subset U_1, N_2 \subset U_2$ となるものがある。よって，$N_1 \cap N_2 \subset U_1 \cap U_2$ となる。(N2) より，$N_3 \in \mathcal{N}(p)$ で $N_3 \subset N_1 \cap N_2$ となるものがある。したがって，$N_3 \subset U_1 \cap U_2$ である。 よって，$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ が成り立つ。

"(O3)"　$U_\lambda \in \mathcal{O}$ とする。$p \in \bigcup_\lambda U_\lambda$ とすると，ある λ に対して $p \in U_\lambda$ となる。$U_\lambda \in \mathcal{O}$ であるから，$N \in \mathcal{N}(p)$ で $N \subset U_\lambda$ となるものがある。よって，$N \subset \bigcup_\lambda U_\lambda$ となる。したがって，$\bigcup_\lambda U_\lambda \in \mathcal{O}$ である。

最後に，$N \in \mathcal{N}(p)$ がこの位相に関して，p の近傍であることを見る。これが示されれば，$\mathcal{N}(p)$ が $(X, \mathcal{O})$ の基本近傍系であることは明らかである。

さて，$p \in U \subset N$ となる $U \in \mathcal{O}$ を見つければよい。そこで，仮に

$$U = \{q \in X \mid \exists N' \in \mathcal{N}(q); N' \subset N\}$$

とおく。$q \in U$ とすると，$q \in N' \subset N$ であるから，$U \subset N$ である。$U \in \mathcal{O}$ を示そう。$N' \in \mathcal{N}(q)$ に対し，(N3) を適用する。$\exists N_2' \in \mathcal{N}(q)$ に対し，$q' \in N_2'$ ならば $\exists N_3' \in \mathcal{N}(q')$ で，$N_3' \subset N' \subset N$ となるものがある。そのとき，$q' \in U$ であるから，$N_2' \subset U$ である。$q \in U \Rightarrow q \in \exists N_2' \subset U$ であるから，$U \in \mathcal{O}$ である。■

問題

2.4 ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ において

$$\mathcal{N}(p) = \{\triangle\mathrm{ABC} \mid p \text{ は } \triangle\mathrm{ABC} \text{ の重心 }\}$$

とおくと，$\mathcal{N}(p)$ は $\mathbb{R}^2$ の通常位相の基本近傍系である。

2.5 前問の $\mathcal{N}(p)$ は基本近傍系の公理を満たすが，(N1), (N2), (N3) は三角形のどのような性質を表しているか述べよ。

3 閉集合，閉包，内部，境界

定義 (閉集合) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の部分集合 F が**閉集合**であるとは，その補集合 $F^c = X - F$ が開集合であるとき。

定理 8 (閉集合の公理) 閉集合全体は次の 3 つの性質をもつ。

(C1) X と $\emptyset$ は閉集合である。

(C2) 有限個の閉集合の合併集合は閉集合である。

(C3) 任意個の閉集合の共通部分は閉集合である。

証明 開集合の公理 (O1), (O2), (O3) より明らかである。■

系 (定義) X の任意の部分集合 A にたいして，A を含む最小の閉集合 $\overline{A}$ がある。$\overline{A}$ を A の**閉包**という。

証明 $\overline{A}$ を A を含むすべての閉集合の共通部分とすればよい。(C3) より $\overline{A}$ は閉集合である。すなわち

$$\overline{A} = \bigcap \{F \mid F \text{ は } A \text{ を含む閉集合 }\}$$

が成り立つ。■

系 A は閉集合であるための必要条件は $\overline{A} = A$ であること。■

定理 9 X の任意の部分集合 A にたいして

$$\overline{A} = \{x \in X \mid x \text{ を含む開集合は } A \text{ と交わる }\}$$

が成り立つ。

証明 前定理より

$$\text{“}x \notin \overline{A}\text{”} \iff \text{“}A \text{ を含む閉集合 } F \text{ で } x \text{ を含まないものがある”}$$

ここで，$U = F^c = X - F$ とおくと，U は A と交わらず，x を含む。すなわち

$$\text{“}x \notin \overline{A}\text{”} \iff \text{“}A \text{ と交わらない開集合 } U \text{ で } x \text{ を含むものがある”}$$

この右辺は，定理の x に関する条件の否定である。■

例 3.1 (ソルゲンフレイ (Sorgenfrey) 直線) $X = \mathbb{R}$ 上の**右半開区間位相** $\mathcal{O}_{Sor}$ を，各 $t \in \mathbb{R}$ の近傍の基本系を

$$\mathcal{N}_{Sor}(t) = \{[t, t+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

として定まるものとする。右半開区間位相を定めた数直線 $\mathbb{R}_{Sor} = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{Sor})$ を**ソルゲンフレイ直線**という。

(i) $(-\infty,\alpha),[\alpha,\beta),[\beta,\infty)$ は $\mathbb{R}_{Sor}$ の閉かつ開集合である。

(ii) $(\alpha,\beta),(\beta,\infty)$ は $\mathbb{R}_{Sor}$ の閉でない開集合である。

(iii) $(-\infty,\alpha],[\alpha,\beta]$ は $\mathbb{R}_{Sor}$ の開でない閉集合である。

(iv) $(\alpha,\beta]$ は $\mathbb{R}_{Sor}$ で閉でも開でもない。

(v) $\mathbb{R}_{Sor}$ は第 1 可算公理を満たす。

(vi) $\mathbb{R}_{Sor}$ は第 2 可算公理は満たさない。

証明 "(vi)" $\mathcal{B}$ を開基とする。各 $t\in\mathbb{R}$ に対し，$[t,t+1)$ は t を含む開集合である。したがって，$B_t\in\mathcal{B}$ で，$t\in B_t\subset[t,t+1)$ となるものを選べる。B_t の最小値は t であるから，$\{B_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ はすべて異なる。

定理 10 (閉包の公理) 閉包をとる操作は次の 4 つの性質をもつ。

(CL1) $\overline{\emptyset}=\emptyset$

(CL2) $A\subset\overline{A}$

(CL3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

(CL4) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$

証明 (CL2) は明らか。$\emptyset,\overline{A}$ は閉集合であるから (CL1), (CL4) が従う。(CL3) を示す。(C2) より $\overline{A}\cup\overline{B}$ は $A\cup B$ を含む閉集合である。したがって $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$。 $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$, $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$ より $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$。■

定理 11 集合 X の各部分集合 $A\subset X$ に対し，部分集合 $\overline{A}\subset X$ が定まっていて，閉包の公理 (CL1), (CL2), (CL3), (CL4) を満たすとき，$\overline{A}$ を閉包とするような X 上の位相 $\mathcal{O}$ が定まる。

証明 X における閉集合を上の系で定める。そのとき (C1), (C2), (C3) を満たすことを示す。

"(C1)" (CL1) より，$\emptyset$ は閉集合。(CL2) を X に適用すると $\overline{X}=X$ を得る。

"(C2)" F_1,F_2 を閉集合とすると $\overline{F_1\cup F_2}=\overline{F_1}\cup\overline{F_2}=F_1\cup F_2$ よって，$F_1\cup F_2$ は閉集合。

"(C3)" まず $A\subset B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$ を示す。実際，$A\subset B$ とすると $A\cup B=B$ よって $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}=\overline{B}$ これより $\overline{A}\subset\overline{B}$ を得る。ここで，F_λ を閉集合とする。$\bigcap_\lambda F_\lambda\subset F_\lambda$ である。したがって，$\overline{\bigcap_\lambda F_\lambda}\subset\overline{F_\lambda}=F_\lambda$ すべての λ について成り立つから $\overline{\bigcap_\lambda F_\lambda}\subset\bigcap_\lambda F_\lambda$ (CL2) と合わせて，等号を得る。以上より，これらの閉集合の補集合（すなわち，開集合）たちは X 上の位相を定めることがわかる。

最後に，この位相による閉包が $\overline{A}$ と一致することを示す。(CL4) より $\overline{A}$ は閉集合であるから，F を A を含む閉集合とするとき，$\overline{A} \subset F$ を示せば十分である。$A \subset F$ より $\overline{A} \subset \overline{F}$　ところが $\overline{F} = F$ である。■

定理 12 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，その基本近傍系を $\{\mathcal{N}(p)\}$ とする。$A \subset X$ に対して，次は同値である。

$$p \in \overline{A} \iff \forall N \in \mathcal{N}(p); A \cap N \neq \emptyset$$

証明　両辺の否定の同値性を示す。

$$\begin{aligned} p \notin \overline{A} &\iff \exists F; A \subset F, p \notin F, F \text{ は閉集合} \\ &\iff \exists U; A \cap U = \emptyset, p \in U, U \text{ は開集合} \\ &\iff \exists N \in \mathcal{N}(p); A \cap N = \emptyset \qquad ■ \end{aligned}$$

定義　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。部分集合 $A \subset X$ が**稠密**であるとは，$\overline{A} = X$ であるときとする。

例 3.2 数直線 $\mathbb{R}$ において

(i) 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ は稠密である。

(ii) 無理数の全体 $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ も稠密である。

(iii) 2 進小数全体 $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{ \frac{n}{2^m} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$ は稠密である。

(iv) $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z} = \left\{ n + \sqrt{2}\,m \,\middle|\, n, m \in \mathbb{Z} \right\}$ は稠密である。■

問 3.3 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，開区間の和集合 $U = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ で，$\mathbb{Q}$ を含み

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon$$

を満たすものがある。

定義　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。その 1 点 $p \in X$ と部分集合 $A \subset X$ に関して：

(i) p が A の**触点** $\iff$ p の任意の近傍 N に対して，$N \cap A \neq \emptyset$ ($\iff$ $p \in \overline{A}$)

(ii) p が A の**集積点** $\iff$ p の任意の近傍 N に対して，$N \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$ ($\iff$ $p \in \overline{A - \{p\}}$)

(iii) p が A の**境界点** $\iff$ p の任意の近傍 N に対して，$N \cap A \neq \emptyset$ かつ $N \cap (X - A) \neq \emptyset$
($\iff$ $p \in \overline{A} \cap \overline{X - A}$)

(iv) p が A の**内点** $\iff$ p のある近傍 N に対して，$N \subset A$ ($\iff$ $p \notin \overline{X-A}$)

(v) p が A の**孤立点** $\iff$ p のある近傍 N に対して，$N \cap A = \{p\}$ ($\iff$ $p \notin \overline{A-\{p\}}$)

定義 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。その部分集合 $A \subset X$ に対して：

(i) A の集積点の全体を A^d または A' で表して，A の**導集合**という。（触点の全体は閉包である。）

(ii) A の境界点の全体を ∂A で表して，A の**境界**という。

(iii) A の内点の全体を $\operatorname{Int} A$ で表して，A の**内部**という。

(iv) $A = A^d$ を満たすとき，A を**完全集合**という。

注意 距離空間の場合，導集合 A^d は閉集合であるが，一般の位相空間においては，閉集合とは限らない。

例 3.4 $X = \mathbb{R}$ を数直線とする。その部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ を

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,$$
$$\begin{cases} A_1 = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 2, 3, 4, \dots \right\} \\ A_2 = \{t \in \mathbb{Q} \mid 1 < t < 2\} \\ A_3 = (2, 3) \\ A_4 = (3, 4) \end{cases}$$

とおくと，次が成り立つ。

- $\overline{A} = \{0\} \cup A_1 \cup [1, 4]$
- $A^d = \{0\} \cup [1, 4]$
- $\partial A = \{0\} \cup A_1 \cup [1, 2] \cup \{3\} \cup \{4\}$
- $\operatorname{Int} A = (2, 3) \cup (3, 4)$
- A の孤立点集合は A_1

例 3.5 数直線 $\mathbb{R}$ の部分集合について，次が成り立つ。

- $A = \left\{ t = \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ とすると，$A^d = \{0\}$, $(A^d)^d = \emptyset$ である。
- $B = \left\{ t = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} \,\middle|\, n, m = 1, 2, 3, \dots \right\}$ とすると，$B^d = \{0\} \cup A$ である。

- $C = \left\{ t = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{l} \;\middle|\; n, m, l = 1, 2, 3, \ldots \right\}$ とすると，$C^d = \{0\} \cup B$ である。

定理 13 (i) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$

(ii) $\mathrm{Int}\, A = X - \overline{X - A}$

(iii) $\overline{A} = \mathrm{Int}\, A \cup \partial A,\ \mathrm{Int}\, A \cap \partial A = \emptyset$

(iv) $\mathrm{Int}\, A$ は A に含まれる最大の開集合

証明 (i),(ii) は定義より従う。(iii) は (i),(ii) の結果。(iv) は $\overline{X - A}$ が $X - A$ を含む最小の閉集合であることと同じである。■

定理 14 $\overline{A} = A \cup A^d$

証明 "$\supset$" は定義より明らか。"$\subset$" を示す。$p \in \overline{A} - A$ として $p \in A^d$ を示せばよい。$p \notin A$ より $A - \{p\} = A$ である。よって，任意の近傍 $N \in \mathcal{N}(p)$ に対して，$N \cap (A - \{p\}) = N \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ。 ■

問 3.6 $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$

例題 (i) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$

(ii) $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ ならば $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$

証明 "(i)" $p \in \partial(A \cup B)$ とすると，$p \in \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ かつ $p \notin \mathrm{Int}(A \cup B)$ である。$p \in \overline{A}$ とすると，$p \notin \mathrm{Int}(A \cup B)$ より $p \notin \mathrm{Int}\, A$ となり，よって，$p \in \partial A$ となる。$p \in \overline{B}$ としても同様。

"(ii)" $p \in \partial A$ とすると，$p \in \overline{A}$ で，よって，$p \in \overline{A \cup B}$ となる。ここで，$p \in \mathrm{Int}(A \cup B)$ とすると，p の近傍 N で $N \subset A \cup B$ となるものがある。$p \in \overline{A}$ より $p \notin \overline{B}$ である。よって，N を十分小さくとれば，$N \cap B = \emptyset$ となる。したがって，$N \subset A$ となるが，これより $p \in \mathrm{Int}\, A$ となり，矛盾。よって，$p \notin \mathrm{Int}(A \cup B)$ でなければならない。■

例題 $\partial(A \cap B) \subset (\overline{A} \cap \partial B) \cup (\partial A \cap \overline{B})$

証明 $p \in \partial(A \cap B)$ とする。$p \in \overline{A \cap B}$ より，$p \in \overline{A} \cap \overline{B}$ である。$\overline{A} \cap \partial B = \overline{A} \cap \overline{B} \cap (X - \mathrm{Int}\, B)$ であるから，$p \in \mathrm{Int}\, B$ として，$p \notin \mathrm{Int}\, A$ をいえばよい。ところが，ここで，$p \in \mathrm{Int}\, A$ とすると，$p \in \mathrm{Int}(A \cap B)$ となり，矛盾。

例題 $\partial A \cap \partial B = \emptyset$ ならば $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ かつ $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}\, A \cup \mathrm{Int}\, B$

証明　前半を示す。"$\subset$"は常に成り立つ。逆を示す。$p \in \overline{A} \cap \overline{B}$ かつ $p \notin \overline{A \cap B}$ として，矛盾を導く。p の十分小さな近傍 N をとると，$N \cap A \cap B = \emptyset$ となる。ここで，さらに $p \in \operatorname{Int} A$ とすると，$N \subset A$ も仮定できる。すると，$N \cap A = N$ で，$N \cap B = N \cap A \cap B = \emptyset$ となり，$p \in \overline{B}$ に矛盾する。したがって，$p \notin \operatorname{Int} A$ である。$p \in \overline{A}$ より $p \in \partial A$ が成り立つ。同様の議論をすると，$p \in \partial B$ も成り立つが，これは $\partial A \cap \partial B = \emptyset$ に矛盾する。後半は A, B をそれぞれの補集合で置きかえればよい。■

問題

3.7 $H = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \;\middle|\; \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である。

3.8 $X \subset \mathbb{R}^2$ を

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ (x, y) \;\middle|\; \left(x - 1 - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right\}$$

とするとき，その閉包を求めよ。

3.9 $Y \subset \mathbb{R}^2$ を

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \mid (x - n)^2 + y^2 = n^2\}$$

とするとき，その閉包を求めよ。

3.10 $Z \subset \mathbb{R}^2$ を

$$Z = \bigcup_{r \in (1,2) \cap \mathbb{Q}} \{(x, y) \mid (x - r)^2 + y^2 = r^2\}$$

とするとき，その閉包を求めよ。

3.11 $W \subset \mathbb{R}^2$ を

$$W = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(x, \frac{1}{\cos x} + n\right) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\}$$

とするとき，その閉包を求めよ。

3.12 $V \subset \mathbb{R}^2$ を

$$V = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ (x, \tan x + n) \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right\}$$

とするとき，その閉包を求めよ。

3.13 $C \subset \mathbb{R}^2$ を

$$C = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \,\middle|\, 0 < x \leqq 1 \right\}$$

とするとき，その閉包を求めよ。

3.14 位相区間 X で，X 以外の部分集合は稠密でないとする。X の位相 $\mathcal{O}$ を求めよ。

3.15 α を無理数とするとき

$$\mathbb{Z} + \alpha\,\mathbb{Z} = \{n + \alpha\, m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

は稠密である。

3.16 $D \subset X$ は稠密で，$E \subset X$ は稠密開集合とすると，$D \cap E \subset X$ も稠密である。

3.17 $D \subset X$ は稠密とすると，X の開集合 G に対して，$\overline{D \cap G} = \overline{G}$ である。

3.18 $\mathcal{SB}$ は位相区間 X の準基であるとする。$D \subset X$ がすべての $S \in \mathcal{SB}$ と交わるとき，$D \subset X$ は稠密か。

3.19 G を X の開集合とする。$A \subset X$ に対し，$\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$ である。

3.20 任意の $A \subset X$ に対し $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$ ならば，G は X の開集合である。

3.21 $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subset \mathrm{Int}(A \cup B) \subset \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

- $A \subset X$ に対し，$\alpha(A) = \mathrm{Int}(\overline{A}),\ \beta(A) = \overline{\mathrm{Int}(A)}$ とおく。

3.22 A が開集合ならば $A \subset \alpha(A)$，A が閉集合ならば $\beta(A) \subset A$

3.23 $A = \alpha(A)$，$B = \alpha(B)$ ならば，$A \cap B = \alpha(A \cap B)$

3.24 任意の $A \subset X$ に対し，$\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ かつ $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$

3.25 U, V が X の互いに交わらない開集合とすると，$\alpha(U) \cap \alpha(V) = \emptyset$

3.26 U, V を X の互いに交わらない開集合で $\overline{U} \cup \overline{V} = X$ となるものとすると，$\alpha(U) = X - \overline{V}$ である。

3.27 $\mathbb{R}$ の部分集合 A で，7 つの集合

$$A, \quad \mathrm{Int}\, A, \quad \overline{A}, \quad \alpha(A), \quad \beta(A), \quad \alpha(\mathrm{Int}\, A), \quad \beta(\overline{A})$$

がすべて異なるものを作れ。

3.28 X の部分集合 A に対し，補集合をとる操作 $A \mapsto X - A = A^c$ と閉包をとる操作 $A \mapsto \overline{A} = A^a$ の 2 つの操作を考える。

(i) 与えられた A に対して，これらの操作を何回か続けて行って得られる集合はいろいろあり得るが，多くとも 14 種類に限ることを示せ。

(ii) $\mathbb{R}$ の部分集合 A で，上の 14 種類の集合がすべて異なるものを作れ。

3.29 (i) $\partial(\overline{A}) \subset \partial A, \quad \partial(\mathrm{Int}\, A) \subset \partial A$

(ii) $\mathbb{R}$ の部分集合 A で，$\partial A,\ \partial(\overline{A}),\ \partial(\mathrm{Int}\, A),\ \partial(\partial A)$ がすべて異なるものを作れ。

3.30 $\partial A = \partial(X - A)$

3.31 A を開集合とすると $\mathrm{Int}(\partial A) = \emptyset$

3.32 $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ ならば，$\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$

3.33 A, B が開集合のとき $(A \cap \partial B) \cup (B \cap \partial A) \subset \partial(A \cap B)$

3.34 A, B が開集合のとき $\partial(A \cap B) \subset (A \cap \partial B) \cup (B \cap \partial A) \cup (\partial A \cap \partial B)$

3.35 $\mathbb{R}$ の開集合 A, B で前 2 問の 3 つの集合がすべて異なるものを作れ。

3.36 $\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A)$

3.37 $\partial A \cap \partial B = \emptyset$ のとき，$\partial(A \cap B) = (\overline{A} \cap \partial B) \cup (\partial A \cap \overline{B})$

（参考）ベールのカテゴリー定理

数直線の部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ について，A が**疎**であるとは閉包 $\overline{A}$ が開区間 (α, β) を含まないときをいう。疎集合可算個の合併で表される集合を**第 1 類集合**といい，そうでないものを**第 2 類集合**という。

定理 (ベール (Baire) のカテゴリー定理) $\mathbb{R}$ は第 2 類集合である。

証明 $A_n (n = 1, 2. \dots)$ を疎集合として，$\mathbb{R} - \bigcup_n A_n \neq \emptyset$ を示す。$I_1 = (0, 1)$ として，$I_1 \not\subset \overline{A_1}$ より，$t_1 \in I_1 - \overline{A_1}$ を選ぶことができる。$t_1 \notin \overline{A_1}$ より，$0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ を，$I_2 = (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon), \overline{I_2} \subset I_1 - \overline{A_1}$ となるように選ぶことができる。

ここで帰納的に，$I_1, I_2, \dots, I_k$ まで選ばれたとして，I_{k+1} を次のように選ぶ。まず，$I_k \not\subset \overline{A_k}$ より，$t_k \in I_k - \overline{A_k}$ を選ぶ。$t_k \notin \overline{A_k}$ より，$0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2^k}$ を，$I_{k+1} = (t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon), \overline{I_{k+1}} \subset I_k - \overline{A_k}$ となるように選ぶことができる。

このようにして，数列 (t_k) を選ぶと，$|t_{k+1} - t_k| < \dfrac{1}{2^k}$ より，コーシー列になり，収束する。極限を t_∞ とおくと，$t_\infty \in \bigcap_n \overline{I_n}$ であるから，$t_\infty \in \mathbb{R} - \bigcup_n A_n$ である。 ■

$\mathbb{Q}$ は第 1 類集合で，また，第 1 類集合 2 つの合併はまた第 1 類集合であるから，$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ は第 2 類集合である。

$A \subset \mathbb{R}$ を疎集合とすると，$\mathbb{R}-\overline{A}$ は開かつ稠密である。したがって，前定理は次のようにもいいかえられる。

定理 $\mathbb{R}$ において，可算個の開かつ稠密集合の共通部分は稠密である。

定義 開集合可算個の共通部分で表される集合を G_δ **集合**という。閉集合可算個の和集合で表される集合を F_σ **集合**という。

G_δ 集合の補集合は F_σ 集合である。また，F_σ 集合の補集合は G_δ 集合である。

例 3.38 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の F_σ 集合で閉集合でない。したがって，$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の G_δ 集合で開集合でない。

定理 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の G_δ 集合でない。したがって，$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の F_σ 集合でない。

証明 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の G_δ 集合であると仮定して矛盾を導く。開集合 $U_i \subset \mathbb{R}$ が存在して，$\mathbb{Q}=\bigcap_{i=1}^\infty U_i$ であるとする。U_i は $\mathbb{Q}$ を含むから，稠密である。$\mathbb{Q}$ は可算であるから，1 列に並べて，$\mathbb{Q}=\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$ とする。$V_i=\mathbb{R}-\{r_i\}$ とおくと，V_i も開かつ稠密である。ところが

$$\bigcap_{i=1}^\infty U_i \cap \bigcap_{j=1}^\infty V_j = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R}-\mathbb{Q}) = \emptyset$$

となり，ベールのカテゴリー定理に矛盾する。■

4 部分空間と相対位相

定義 (部分空間) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$Y \subset X$ を部分集合とするとき，X の開集合と Y との共通部分全体

$$\mathcal{O}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{O}\}$$

は Y 上の位相を定める。$\mathcal{O}_Y$ を**相対位相**，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ を**部分空間**という。

証明 $\mathcal{O}_Y$ が (O1), (O2), (O3) を満たすことを示せばよいが，明らかである。■

定理 15 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$Y \subset X$ を部分集合とする。

(i) $\mathcal{B}$ を $(X, \mathcal{O})$ の開基とするとき，$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ は部分空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の開基である。

(ii) $\mathcal{SB}$ を $(X, \mathcal{O})$ の準基とするとき，$\mathcal{SB}_Y = \{S \cap Y \mid S \in \mathcal{SB}\}$ は部分空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の準基である。

証明 “(i)” Y の開集合は $U \cap Y$ と表される。U は X の開集合であるから，$\mathcal{B}$ の元の合併集合として表される。$U = \bigcup B_\lambda$ このとき

$$U \cap Y = \left(\bigcup B_\lambda\right) \cap Y = \bigcup (B_\lambda \cap Y)$$

したがって，Y の開集合は $\mathcal{B}_Y$ の元の合併集合として表される。

“(ii)” $\mathcal{SB}$ の元有限個の共通部分全体は X の開基である。したがって，$\{S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \cap Y \mid S_i \in \mathcal{SB}, i = 1, 2, \ldots, n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ は Y の開基である。ところが

$$S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \cap Y = (S_1 \cap Y) \cap (S_2 \cap Y) \cap \cdots \cap (S_n \cap Y)$$

であるから，これは $\mathcal{SB}_Y$ の元有限個の共通部分である。■

定理 16 (i) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$Y \subset X$ を部分集合とする。さらに $q \in Y$ とする。N を $(X, \mathcal{O})$ における q の近傍とすると，$N \cap Y$ は $(Y, \mathcal{O}_Y)$ における q の近傍である。また，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ における q の近傍 N_Y に対して，$(X, \mathcal{O})$ における q の近傍 N で，$N_Y = N \cap Y$ となるものが存在する。

(ii) $\{\mathcal{N}(p) \mid p \in X\}$ を $(X, \mathcal{O})$ の基本近傍系とするとき，$q \in Y$ に対して $\mathcal{N}_Y(q) = \{N \cap Y \mid N \in \mathcal{N}(q)\}$ とおくと，$\{\mathcal{N}_Y(q) \mid q \in Y\}$ は部分空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の基本近傍系である。

証明 “(i)” N を $(X, \mathcal{O})$ における q の近傍とすると，$q \in U \subset N$ となる $U \in \mathcal{O}$ がある。すると $q \in U \cap Y \subset N \cap Y$ であるから，$N \cap Y$ は Y における q の近傍である。また，N_Y を Y における q の近傍とすると，$q \in U_Y \subset N_Y$ となる $U_Y \in \mathcal{O}_Y$ がある。さらに，$U_Y = U \cap Y$ となる $U \in \mathcal{O}$ がある。$N = U \cup N_Y$ とおけば，N は X での q の近傍で $N_Y = N \cap Y$ である。

“(ii)” $q \in Y$ の近傍 $N_Y = N \cap Y$ に対して，N は X での q の近傍であるから，ある $N_1 \in \mathcal{N}(q)$ で $N_1 \subset N$ となる。したがって，$N_1 \cap Y$ は Y での q の近傍で，$N_1 \cap Y \subset N_Y$ である。よって，$\{\mathcal{N}_Y(q) \mid q \in Y\}$ は部分空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ の基本近傍系である。■

例 4.1 (X, d) を距離空間とし，$Y \subset X$ を部分集合とする。Y 上の距離 d_Y を d の $Y \times Y$ への制限とする。すなわち，$p, q \in Y$ に対して $d_Y(p, q) = d(p, q)$ である。距離空間 (Y, d_Y) の距離位相は距離空間 (X, d) の距離位相の Y への相対位相である。実際，(Y, d_Y) の ε 近傍 $N_\varepsilon^Y(p)$ に対して

$$
\begin{aligned}
N_\varepsilon^Y(p) &= \{q \in Y \mid d_Y(p, q) < \varepsilon\} = \{q \in X \mid d(p, q) < \varepsilon\} \cap Y \\
&= N_\varepsilon(p) \cap Y
\end{aligned}
$$

が成り立つ。■

例 4.2 ($\mathbb{R}^n$ の部分空間)

$$
\begin{aligned}
S^{n-1} &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1\} \\
D^n &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 \leqq 1\}
\end{aligned}
$$

とおく。S^{n-1} を $(n-1)$ **次元球面**，D^n を n **次元円板**という。$S^{n-1} \subset D^n \subset \mathbb{R}^n$ である。■

系 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$A \subset Y \subset X$ を部分集合とする。

(i) A の X での閉包を $\overline{A}^X$，Y での閉包を $\overline{A}^Y$ で表すと

$$\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$$

である。

(ii) A の X での内部を $\mathrm{Int}^X A$，Y での内部を $\mathrm{Int}^Y A$ で表すと

$$\mathrm{Int}^X A = \mathrm{Int}^Y A \cap \mathrm{Int}^X Y$$

である。

証明 “(i)” $p \in \overline{A}^Y$ とする。$N \in \mathcal{N}(p)$ とすると，$N \cap Y \in \mathcal{N}_Y(p)$ である。したがって，$(N \cap Y) \cap A \neq \emptyset$ で，特に，$N \cap A \neq \emptyset$ となる。ゆえに $p \in \overline{A}^X$ が成り立つ。

逆に，$p \in \overline{A}^X \cap Y$ とする。$N_Y \in \mathcal{N}_Y(p)$ とすると，ある $N \in \mathcal{N}(p)$ に対して $N_Y = N \cap Y$ となる。このとき，$A \subset Y$ に注意すると，$N_Y \cap A = (N \cap Y) \cap A = N \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ。よって，$p \in \overline{A}^Y$ である。

"(ii)"　$p \in \mathrm{Int}^X A$ とする。$N \in \mathcal{N}(p)$ で $N \subset A$ となるものがある。そのとき，$N \cap Y \subset A$ であるから，$p \in \mathrm{Int}^Y A$ となる。$p \in \mathrm{Int}^X Y$ は明らか。

逆に，$p \in \mathrm{Int}^Y A \cap \mathrm{Int}^X Y$ とすると，十分小さい $N \in \mathcal{N}(p)$ をとれば，$N \cap Y \subset A$ かつ $N \subset Y$ となる。よって，$N = N \cap Y \subset A$ が成り立つ。すなわち，$p \in \mathrm{Int}^X A$ となる。 ■

例 4.3　(i) $X = \mathbb{R}$ を数直線とし，$Y = (0,2), A = (1,2)$ とすると

$$\overline{A}^X = [1,2] \quad \text{だが} \quad \overline{A}^Y = [1,2)$$

である。

(ii) 同じく，$Y = [0,2], A = [1,2]$ とすると

$$\mathrm{Int}^X A = (1,2) \quad \text{だが} \quad \mathrm{Int}^Y A = (1,2] \quad ■$$

系　(i) A が Y の開集合で Y が X の開集合ならば，A は X の開集合である（開の開は開）。

(ii) A が Y の閉集合で Y が X の閉集合ならば，A は X の閉集合である（閉の閉は閉）。■

例 4.4 (カントール（Cantor）集合) 次のような方法で定義される閉区間 $[0,1]$ の部分集合 C を**カントール集合**という。まず，$C_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ を帰納的に

(i) $C_0 = [0,1]$

(ii) C_i が既に与えられ，たがいに交わらない 2^i 個の閉区間の合併になっているものとする。その各閉区間 $[a,d]$ に対し，b と c を

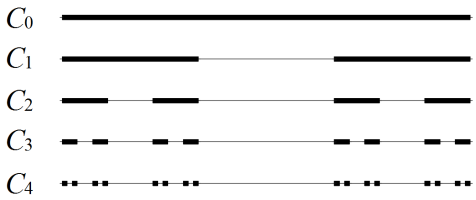
$$a < b < \frac{a+d}{2} < c < d$$

となるように選ぶ。C_i において，各 $[a,d]$ を $[a,b] \cup [c,d] = [a,d] - (b,c)$ で置き換えたものを C_{i+1} とおく。

すると C_{i+1} はたがいに交わらない 2^{i+1} 個の閉区間の合併である。そこで

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

とおく。古典的な例は " 中 3 分の 1" カントール集合である。それは (b,c) として，つねに，$[a,d]$ のまん中の 3 分の 1 の開区間を選んで得られるものである。すなわち b, c は $[a,d]$ の 3 等分点である。" 中 3 分の 1" カントール集合は **3 進集合** (ternary set) ともよばれる。



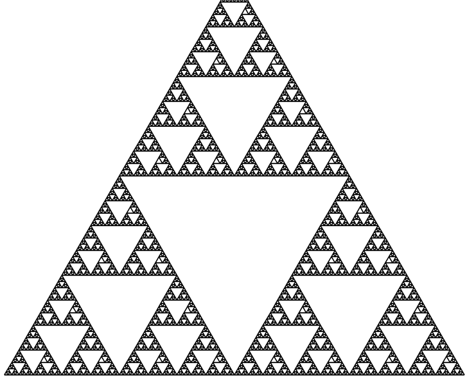
定理 17 S を 0 と 1 からなる無限列全体の集合とすると，全単射 $\varphi : C \to S$ を構成することができる。

証明 $x \in C$ とする。各 i に対して $x \in C_i$ である。x を含む C_{i-1} の小区間は，C_i の小区間を 2 つ含むが，そのとき，x が右側の小区間にあるとき $s_i = 1$，左側の小区間にあるとき $s_i = 0$ とおく。これにより，$x \in C$ に対して，$\varphi(x) = (s_1, s_2, s_3, \ldots) \in S$ を定めることができる。φ は C から S への全単射を与えている。■

例 4.5 (シェルピンスキー（Sierpinski）のガスケット) 正三角形 T_0 から，その 3 辺の中点を頂点とする正三角形の内部を除く操作を考える。面積は $\dfrac{3}{4}$ になる。残った 4 つの正三角形に同じ操作を繰り返す。n 回繰り返したし手得られる図形 T_n は 4^n 個の正三角形からなる図形である。1 回の操作で面積は $\dfrac{3}{4}$ になるから，T_n の面積は T_0 の $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ 倍になる。

$$T = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$$

をシェルピンスキーのガスケットという。



問題

4.6 X を位相空間，Y をその部分空間とする。部分集合 $A \subset X$ に対して

(i) $(\mathrm{Int}^X A) \cap Y \subset \mathrm{Int}^Y (A \cap Y)$

(ii) $\overline{A}^X \cap Y \supset \overline{A \cap Y}^Y$

それぞれ，等号の成り立たない例を示せ。

4.7 A を X の閉集合，U を A の開集合，V を X の開集合で，$U \subset V$ とする。$V \cup (V - A)$ は X の開集合である。

4.8 $A \subset B \subset X$ とする。A が B で稠密ならば，A は $\overline{B}$ で稠密である。

4.9 X を位相空間，Y をその部分空間とする。部分集合 $A \subset X$ に対して，U_Y を $A \cap Y$ を含む Y の開集合とすると，$A \cap \overline{Y - U_Y} = \emptyset$ である。

4.10 X を位相空間とする。X の部分集合 A, B に対して

$$A \cup B = X \text{ かつ } \overline{A - B} \cap (B - A) = (A - B) \cap \overline{B - A} = \emptyset$$

とする。

(i) 「A, B がともに開集合」または「A, B がともに閉集合」ならば，仮定を満たす。

部分集合 $C \subset X$ に対して，

(ii) $\overline{C} = \overline{C \cap A}^A \cup \overline{C \cap B}^B$

(iii) 「$C \cap A$ は A で閉」かつ「$C \cap B$ は B で閉」ならば「C は X で閉」

(iv) 「$C \cap A$ は A で開」かつ「$C \cap B$ は B で開」ならば「C は X で開」

4.11 X を位相空間とする。X の部分集合 A, B, C に対して

$$A \cup B = X \text{ かつ } C \subset A \cap B$$

とする。

(i) 「C は A で開」かつ「C は B で開」ならば「C は X で開」

(ii) 「C は A で閉」かつ「C は B で閉」ならば「C は X で閉」

4.12 X を位相空間とする。X の閉集合 A, B で，$A \cup B = X$ とする。部分集合 $S \subset A$ に対し，U_B を $S \cap B$ を含む B の開集合とすると，$S \subset \mathrm{Int}(A \cup U_B)$ である。

5 連続写像

位相空間の議論は，いくつかの空間の相関を通じて考えることにより，豊かな世界が広がる。そのとき，連続写像の概念が重要である。

定義 (連続性) 2 つの位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ の間の写像 $f : X \to Y$ が**連続**であるとは，Y の任意の開集合 $V \in \mathcal{O}_Y$ に対して，引き戻し $f^{-1}(V)$ が X の開集合になるときとする。

$$V \in \mathcal{O}_Y \;\Rightarrow\; f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$$

例 5.1 距離空間 (X, d_X) から (Y, d_Y) への写像 $f : X \to Y$ が連続であるとは，いわゆる ε-δ 論法で定義された。すなわち，任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対して，十分小さい $\delta > 0$ をとれば

$$d_X(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$$

が成り立つとき，であった。この定義は上の定義と一致する。

証明 "$\Rightarrow$" $f(x)$ の ε 近傍 $N_\varepsilon(x)$ は Y の開集合である。したがって，$U = f^{-1}(N_\varepsilon(f(x)))$ は X の開集合で，x を含む。開集合の定義より，$N_\delta(x) \subset f^{-1}(N_\varepsilon(f(x)))$ となる $\delta > 0$ がある。このとき，上式が成り立つ。実際

$$\begin{aligned} d_X(x, y) < \delta \;&\Rightarrow\; y \in N_\delta(x) \subset f^{-1}(N_\varepsilon(f(x))) \\ &\Rightarrow\; f(y) \in N_\varepsilon(f(x)) \Rightarrow\; d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" $V \subset Y$ を開集合とする。$U = f^{-1}(V) \subset X$ が開集合であることを示せばよい。$x \in U$ とする。V は開集合で $f(x) \in V$ であるから，ある $\varepsilon > 0$ で，$N_\varepsilon(f(x)) \subset V$ となるものがある。上式を満たす $\delta > 0$ をとれば，$d_X(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$ となるが，これは $f(N_\delta(x)) \subset N_\varepsilon(f(x)) \subset V$ を示す。よって，$N_\delta(x) \subset f^{-1}(N_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(V) = U$ である。■

近傍および基本近傍系を用いて，連続性を特徴付けることができる。

定理 18 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし，それぞれの基本近傍系を $\{\mathcal{N}_X(p)\}, \{\mathcal{N}_Y(q)\}$ とする。写像 $f : X \to Y$ に対して，次の 3 条件は同値である。

(a) $f : X \to Y$ は連続である。

(b) すべての $p \in X$ と $f(p) \in Y$ の近傍 N_Y に対して，$f^{-1}(N_Y)$ は p の近傍である。

(c) すべての $p \in X$ と $V_Y \in \mathcal{N}_Y(f(p))$ に対して，十分小さい $V_X \in \mathcal{N}_X(p)$ を選べば，$f(V_X) \subset V_Y$ とすることができる。

証明 “(a) $\Rightarrow$ (b)” N_Y を $f(p)$ の近傍とすると，$U_Y \in \mathcal{O}_Y$ で $f(p) \in U_Y \subset N_Y$ とできる。よって $p \in f^{-1}(U_Y) \subset f^{-1}(N_Y)$ となる。f の連続性より，$f^{-1}(U_Y)$ は開集合であるから，$f^{-1}(N_Y)$ は p の近傍である。

“(b) $\Rightarrow$ (c)” $V_Y \in \mathcal{N}_Y(f(p))$ とすると，(b) より $f^{-1}(V_Y)$ は p の近傍である。よって $V_X \in \mathcal{N}_X(p)$ で $V_X \subset f^{-1}(V_Y)$ とできる。そのとき $f(V_X) \subset V_Y$ である。

“(c) $\Rightarrow$ (a)” $U_Y \in \mathcal{O}_Y$ とする。$p \in f^{-1}(U_Y)$ に対して，$f(p) \in U_Y$ である。よって $V_Y \in \mathcal{N}_Y(f(p))$ を選び $V_Y \subset U_Y$ とできる。(c) より $V_X \in \mathcal{N}_X(p)$ で $f(V_X) \subset V_Y$ としてよい。そのとき $p \in V_X \subset f^{-1}(V_Y) \subset f^{-1}(U_Y)$ が成り立つ。したがって $f^{-1}(U_Y)$ は開集合である。■

定理 19 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。写像 $f : X \to Y$ が連続である必要十分条件は，任意の $A \subset X$ に対して

$$f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$$

が成り立つこと。

証明 “$\Rightarrow$” $U = Y - \overline{f(A)}$ とおくと U は開集合。したがって，$f^{-1}(U)$ は X の開集合で A と交わらない。ゆえに $\overline{A} \cap f^{-1}(U) = \emptyset$ したがって $f\left(\overline{A}\right) \cap U = \emptyset$ これは $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ を示す。

“$\Leftarrow$” $U \subset Y$ を開集合とする。$A = X - f^{-1}(U)$ とおき，A が閉集合であることを示せばよい。そのために $\overline{A} \subset A$ を示す。今，$f(A) \cap U = \emptyset$ であるから $\overline{f(A)} \cap U = \emptyset$ である。条件より $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ であるから $f\left(\overline{A}\right) \cap U = \emptyset$ である。これは $\overline{A} \subset X - f^{-1}(U) = A$ を示す。■

問 5.2 写像 $f : X \to Y$ が連続とする。$B \subset Y$ に対し，$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ を示し，等号の成り立たない例を挙げよ。

相対位相，部分空間に関して，包含写像 $\iota : Y \to X,\ \iota(p) = p\ (\forall p \in Y)$ は重要である。

定理 20 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$Y \subset X$ を部分集合とする。包含写像 $\iota : Y \to X$ は位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ と $(X, \mathcal{O})$ の間の写像として連続である。さらに，$\mathcal{O}_Y$ は Y の位相の中で，$\iota : Y \to X$ を連続とする，もっとも開集合の少ない位相である。また，任意の位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $f : Z \to Y$ に対して，次は同値である。

$$f : Z \to Y \text{ は連続} \iff \iota \circ f : Z \to X \text{ は連続}$$

証明 “連続” 実際，$U \subset X$ を開集合とすると，$\iota^{-1}(U) = U \cap Y$ は部分空間 Y の開集合である。

“開集合が少ない” 実際，$\iota : Y \to X$ が連続ならば，$U \cap Y$ は Y の開集合でなければならない。他にはない。

“同値” “$\Rightarrow$”は明らか。逆を示す。$\iota \circ f : Z \to X$ は連続であるとする。Y の開集合 $U \cap Y$ に対して，$U \cap Y = \iota^{-1}(U)$ であるから

$$f^{-1}(U \cap Y) = f^{-1}(\iota^{-1}(U)) = (\iota \circ f)^{-1}(U)$$

と表せる。仮定より，これは Z の開集合である。■

定理 21 X, Y を位相空間とし，$\{U_\lambda\}$ を X の開被覆とする。すなわち，各 $U_\lambda \subset X$ は開集合で，$X = \bigcup_\lambda U_\lambda$ であるとする。写像 $f : X \to Y$ が連続であるためには，すべての λ に対し，制限 $f|U_\lambda : U_\lambda \to Y$ が連続であることが必要十分である。

証明 U_λ の包含写像を $i_\lambda : U_\lambda \subset X$ とおくと，i_λ は連続で，$f|U_\lambda = f \circ i_\lambda$ である。よって，必要性が従う。十分性を確かめよう。各 $f|U_\lambda$ が連続であるとする。開集合 $W \subset Y$ に対し，$(f|U_\lambda)^{-1}(W) \subset U_\lambda$ は開集合であるが，$U_\lambda \subset X$ も開集合なので，$(f|U_\lambda)^{-1}(W) \subset X$ もまた開集合である。ところが，$(f|U_\lambda)^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap U_\lambda$ なので，それらの合併集合

$$\bigcup_\lambda f^{-1}(W) \cap U_\lambda = f^{-1}(W) \cap \left(\bigcup_\lambda U_\lambda \right) = f^{-1}(W)$$

も開集合である。■

定理 22 X, Y を位相空間とし，$K_1, K_2 \subset X$ を閉集合で，$X = K_1 \cup K_2$ なるものとする。。写像 $f : X \to Y$ が連続であるためには，制限 $f|K_1 : K_1 \to Y$, $f|K_2 : K_2 \to Y$ がともに連続であることが必要十分である。

証明 必要性は上と同様。十分性を示す。$i = 1, 2$ に対し $f|K_i$ が連続であるとする。開集合 $W \subset Y$ に対し，$(f|K_i)^{-1}(W) \subset K_i$ は開集合。したがって，補集合 $(f|K_i)^{-1}(Y - W) \subset K_i$ は閉集合。，$K_i \subset X$ も閉集合なので，$(f|K_i)^{-1}(Y - W) \subset X$ もまた閉集合である。ところが，$(f|K_i)^{-1}(Y - W) = f^{-1}(Y - W) \cap K_i$ なので，合併集合

$$\begin{aligned}(f^{-1}(Y - W) \cap K_1) \cup (f^{-1}(Y - W) \cap K_2)\\ = f^{-1}(Y - W) \cap (K_1 \cup K_2) = f^{-1}(Y - W)\end{aligned}$$

も閉集合。したがって，その補集合 $f^{-1}(W)$ は開集合である。■

これら 2 つの定理を合わせると次が得られる。

定義 (局所有限被覆) X の被覆 $X = \bigcup_\lambda K_\lambda$ が局所有限であるとは，各点 $x \in X$ に対して，十分小さい近傍 U_x を選べば，U_x と交わる K_λ が有限個しかないようにできるときである。

$$U_x \cap K_\lambda \neq \emptyset \ \Rightarrow\ \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$$

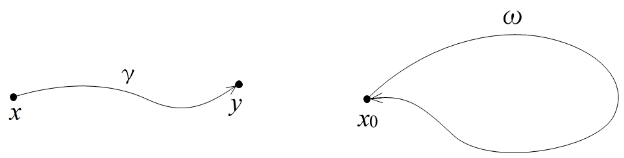
定理 23 X, Y を位相空間とし，$X = \bigcup_\lambda K_\lambda$ を局所有限閉被覆とする。写像 $f : X \to Y$ が連続であるためには，すべての制限 $f|K_\lambda : K_\lambda \to Y$ が連続であることが必要十分である。

証明 十分性を示す。局所有限性より，各点 $x \in X$ に対して，十分小さい近傍 U_x を選ぶ。x は任意であるから，定理 23 より，$f|U_x$ が連続であることを示せばよい。ここで

$$U_x = (U_x \cap K_{\lambda_1}) \cup (U_x \cap K_{\lambda_2}) \cup \cdots \cup (U_x \cap K_{\lambda_N})$$

と有限個の閉集合に分かれ，それぞれの上で $f|\,(U_x \cap K_{\lambda_i})$ は連続であるので，$f|U_x$ も連続である。■

定義 位相空間 X に対して，閉区間 $I = [0,1]$ から X への連続写像 $\gamma : I \to X$ を X の**道** (path) という。$x = \gamma(0)$ を道 γ の**始点**，$y = \gamma(1)$ を道 γ の**終点**という。また，道 γ を x から y への道ともいう。始点と終点が一致した道 ω を**閉じた道**または**閉道**という。



道は通常，点の連続的な移動や曲線を表すと考える。しかし，次のような曲線も道の定義を満たしている。

例 5.3 (ペアノ曲線) 閉区間 $I = [0,1]$ から正方形

$$I^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\right\}$$

への連続な全射 f を構成する。**ペアノ（Peano）曲線**という。t に対して $f(t)$ を小正方形の列の共通部分として定めよう。

4 つの写像 $q_0, q_1, q_2, q_3 : I^2 \to I^2$ を

$$\begin{cases} q_0(s,t) = \left(\dfrac{t}{2}, \dfrac{s}{2}\right) \\ q_1(s,t) = \left(\dfrac{s}{2}, \dfrac{1+t}{2}\right) \\ q_2(s,t) = \left(\dfrac{1+s}{2}, \dfrac{1+t}{2}\right) \\ q_3(s,t) = \left(\dfrac{2-t}{2}, \dfrac{1-s}{2}\right) \end{cases}$$

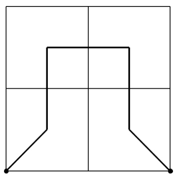
とおく。I^2 の 2 頂点 $(0,0), (1,0)$ に関して

$$\begin{aligned} &q_0((0,0)) = (0,0),\ q_0((1,0)) = q_1((0,0)),\ q_1((1,0)) = q_2((0,0)), \\ &q_2((1,0)) = q_3((0,0)), q_3((1,0)) = (1,0) \end{aligned}$$

(1) 正方形 $S = I^2$ を 4 等分して S_0, S_1, S_2, S_3 をそれぞれ，左下，左上，右上，右下にとる。

1	2
0	3

すると，$i = 0, 1, 2, 3$ に対して，$S_i = q_i(S)$ である。区間 $I = [0, 1]$ を 4 等分して，小区間を I_0, I_1, I_2, I_3 とし，I_i を S_i に写す連続写像 $f_1 : I \to S$ をつくる。ここで，$f_1(0) = (0, 0)$，$f_1(1) = (1, 0)$ となるようにする。



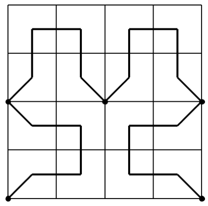
(2) $0 \leqq n \leqq 15$ に対して，$n = 4i + j$ $(0 \leqq i, j \leqq 3)$ を 4 進表示とし，$S_{ij} = q_i(S_{\mathrm{j}})$ とおく。その位置は次のようになる。

11	12	21	22
10	13	20	23
03	02	31	30
00	01	32	33

その結果，00 は左下，33 は右下，ij を 4 進表示 $n = 4i + j$ と思うと，n と $n + 1$ とは常に隣り合っていることに注意する。区間 $I = [0, 1]$ を 16 等分して，4 進表示順に，小区間を $I_{00}, I_{01}, \ldots, I_{33}$ と名付ける。ここで，$f_2 : I \to S$ を

$$f_2(s) = \begin{cases} q_0(f_1(4s)) & \left(0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{4}\right) \\ q_1(f_1(4s-1)) & \left(\dfrac{1}{4} \leqq s \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ q_2(f_1(4s-2)) & \left(\dfrac{1}{2} \leqq s \leqq \dfrac{3}{4}\right) \\ q_3(f_1(4s-3)) & \left(\dfrac{3}{4} \leqq s \leqq 1\right) \end{cases}$$

と定める。すると，f_2 は連続で，$f_2(0) = (0, 0)$，$f_2(1) = (1, 0)$ となり，$f_2(I_{ij}) \subset S_{ij}$ を満たす。



....

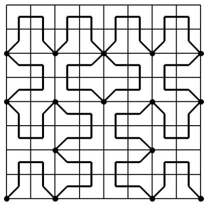
(k) 以下これを繰り返す。すなわち，4 進表示 $n = i_1 4^{k-1} + i_2 4^{k-2} + \cdots + i_{k-1}4 + i_k$ $(0 \leqq i_1, i_2, \ldots, i_k \leqq 3)$ に対して，$S_{i_1 i_2 \ldots i_k} = q_{i_1}(S_{i_2 \ldots i_k})$ とおくと，$00\ldots0$ は左下，$33\ldots3$ は右下，$n = i_1 i_2 \ldots i_k$ を 4 進表示と思うと，n と $n+1$ とは常に隣り合っている。たとえば，$k = 3$ の場合の配置は

111	112	121	122	211	212	221	222
110	113	120	123	210	213	220	223
103	102	131	130	203	202	231	230
100	101	132	133	200	201	232	233
033	030	023	022	311	310	303	300
032	031	020	021	312	313	302	301
001	002	013	012	321	320	331	332
000	003	010	011	322	323	330	333

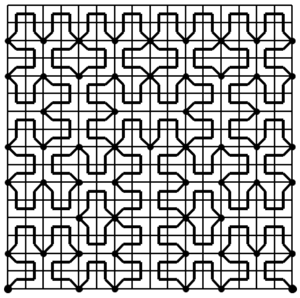
となっている。I を 4^k 等分して，小区間を $I_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ として，$I_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ を $S_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ に写す連続写像 $f_k : I \to S$ を

$$f_k(s) = \begin{cases} q_0(f_{k-1}(4s)) & \left(0 \leqq s \leqq \dfrac{1}{4}\right) \\ q_1(f_{k-1}(4s-1)) & \left(\dfrac{1}{4} \leqq s \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ q_2(f_{k-1}(4s-2)) & \left(\dfrac{1}{2} \leqq s \leqq \dfrac{3}{4}\right) \\ q_3(f_{k-1}(4s-3)) & \left(\dfrac{3}{4} \leqq s \leqq 1\right) \end{cases}$$

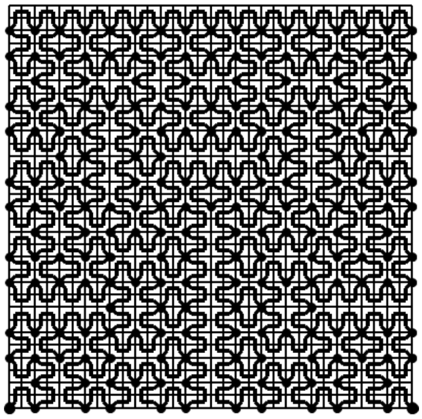
と定めることができる。



f_3



f_4



f_5

$I_{i_1 i_2 \dots i_k} \subset I_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$, $S_{i_1 i_2 \dots i_k} \subset S_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ に注意すると，$f_k(I_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}) \subset S_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ がわかる。したがって，任意の $t \in I$ に対して

$$\|f_k(t) - f_{k-1}(t)\| \leqq \frac{1}{2^{k-2}\sqrt{2}}$$

が成り立つ。よって，点列 $\{f_k(t)\}$ はコーシー列である。そこで

$$f(t) = \lim_{k \to \infty} f_k(t)$$

と定める。$f(t)$ を次のように表すことができる。$t \in I$ を 4 進小数展開する。

$$\begin{aligned} t &= \frac{i_1}{4} + \frac{i_2}{4^2} + \cdots + \frac{i_k}{4^k} + \cdots \quad (0 \leqq i_k \leqq 3) \\ &= 0.i_1 i_2 i_3 \dots \end{aligned}$$

そのとき

$$\{f(t)\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1 i_2 \dots i_k}$$

である。これより，次の定理が得られる。

定理　(ペアノ曲線) $f : I \to I^2$ は全射連続写像である。■

● 同相写像

定義　(同相写像，同相) $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。連続写像 $f : X \to Y$ が**同相写像**であるとは，f が全単射（$1:1$ かつ上への写像）で $f^{-1} : Y \to X$ も連続であるとき。また，そのような f が存在するとき，位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は**同相**であるという。

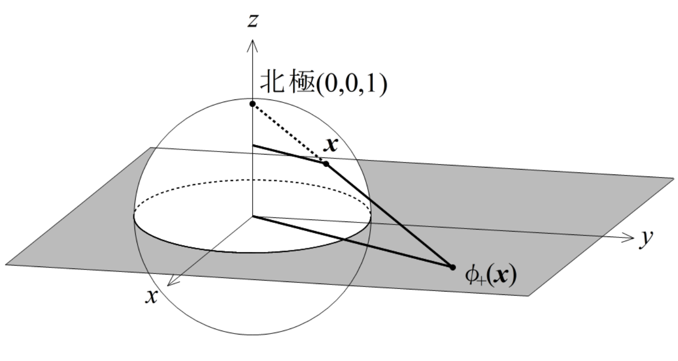
例 5.4 (立体射影) 球面 S^n 上の点 $\boldsymbol{x}$ と北極（南極）$(0, \ldots, 0, \pm 1)$ を通る直線が赤道面 $x_{n+1} = 0$ と交わる点を $\varphi_\pm(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ とする。すると，$\varphi_+ : S^n - \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n, \varphi_- : S^n - \{(0, 0, \ldots, 0, -1)\} \to \mathbb{R}^n$ は

$$\varphi_\pm(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 \mp x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}} \right)$$

と表される。それらの逆写像は

$$\varphi_\pm^{-1}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \left(\frac{2u_1}{\|\boldsymbol{u}\|^2 + 1}, \ldots, \frac{2u_n}{\|\boldsymbol{u}\|^2 + 1}, \pm \frac{\|\boldsymbol{u}\|^2 - 1}{\|\boldsymbol{u}\|^2 + 1} \right)$$

で与えられるから，$\varphi_\pm$ は同相写像である。

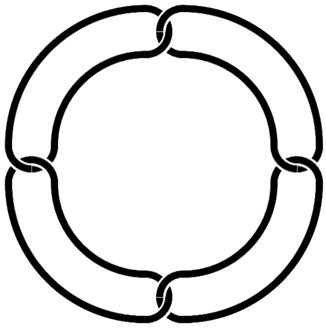


定義　位相空間 X が**等質**であるとは，任意の 2 点 $p, q \in X$ に対して，自己同相写像 $h : X \to X$ で $h(p) = q$ となるものが存在するとき。

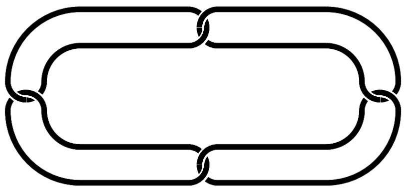
例 5.5 $\mathbb{R}^n$ は平行移動により，等質である。S^n は回転により，等質である。

例 5.6 (アントワーヌのネックレス) 次のような方法で構成される空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 A を**アントワーヌのネックレス**という。まず，$A_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ を帰納的に

(i) A_1 は 4 つの環からなる鎖の環とする。



(ii) A_i が既に与えられ，たがいに交わらない 4^i 個の環の合併になっているものとする。A_{i+1} は，その各環を，そこに含まれる 4 つの環からなる鎖の環で置きかえたものとする。



すると，A_{i+1} はたがいに交わらない 4^{i+1} 個の環の合併である。このようにして，減少列

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

が得られた。そこで

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

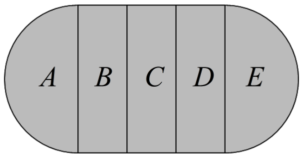
とおく。

定理 24 S を 0 と 1 からなる無限列全体の集合とすると，全単射 $\psi : A \to S$ を構成することができる。

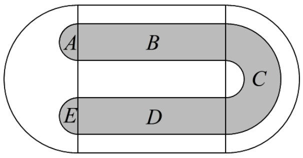
証明 $x \in A$ とする。各 i に対して $x \in A_i$ である。x を含む A_{i-1} の環は，A_i の小環を 4 つ含むが，そのとき，x がどの小環にあるかにより，右上なら $t_i = 00$，左上なら $t_i = 01$，左下なら $t_i = 11$，右下なら $t_i = 10$ とおく。これにより，$x \in A$ に対して，$\psi(x) = (t_1, t_2, t_3, \ldots) \in S$（$0, 1$ を 2 個ずつ並べている）を定めることができる。ψ は A から S への全単射を与えている。■

定理 25 $\psi^{-1} \circ \varphi : C \to A$ はカントール集合からアントワーヌのネックレスへの同相写像を与えている。■

例 5.7 (スメールの馬蹄形写像) X を $\mathbb{R}^2$ の閉領域で，下図のようなものとする。A と E は半円で，B, C, D は正方形を 3 等分した長方形である。



X 上の写像 f を下図で定める。



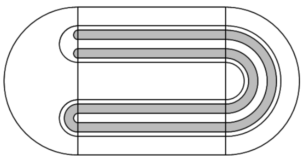
ここで，f は A 上では縮小変換，B 上では x 方向拡大 y 方向縮小のアフィン変換，C 上では (x, y) を (r, θ) とする極座標変換，D 上では -1 倍と B 上と同様なアフィン変換，E 上では -1 倍と縮小変換である。これで写像が確定し，連続写像であることがわかる。さらに，f は X とその像 $f(X)$ の間の同相写像である。

$f(X) \subset X$ であるから，f を 2 回以上適用することができる。

$$x \mapsto f(x) \mapsto f(f(x)) \mapsto \ldots \mapsto f^{\circ n}(x)$$

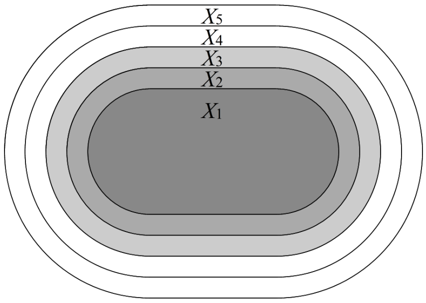
ここで，$f^{\circ 1}(x) = f(x), f^{\circ 2}(x) = f(f(x)), f^{\circ n}(x) = f(f^{\circ(n-1)}(x))$ と表した。

この $f^{\circ n}$ は複雑な写像である。$f^{\circ 2}$ の像を下図で示す。



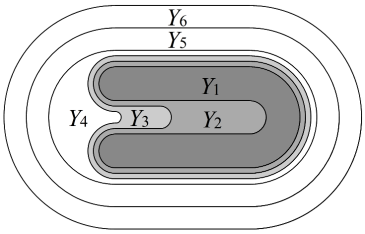
この図から，$f^{\circ 3}$ は想像できるであろう。$f^{\circ 100}$ は，定義はあるが，想像することは困難であろう。それは，左右方向では，数倍の拡大を 100 回繰り返し，また，上下方向では，数分の一の縮小を 100 回繰り返すことは想像できる。しかし，それはすべて狭い範囲で起こっている。すなわち，それは想像できないほど複雑な変換であるが，それでも同相写像で，開集合や閉集合を保つ写像である。

この $f : X \to f(X)$ を同相写像 $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に拡張することができる。$X_1 = X$ とおき，順次大きくなる閉領域 $X_2, X_3, X_4, \ldots$ を図のように選ぶ。



$i \geqq 2$ に対して，$\overline{X_i - X_{i-1}}$ は円環領域 $A_i = \left\{(x,y) \,\middle|\, i-1 \leqq \sqrt{x^2+y^2} \leqq i\right\}$ と同相である。

同様に，$Y_1 = f(X)$ とおき，順次大きくなる閉領域 $Y_2, Y_3, Y_4, \ldots$ を図のように選ぶ。ここでは，$Y_4 = X_1$ となるようにした。



ここでも，やはり，$i \geqq 2$ に対して，$\overline{Y_i - Y_{i-1}}$ は円環領域 A_i と同相である（少し歪んでいる）。

同相写像 $\tilde{f}_i : \overline{X_i - X_{i-1}} \to \overline{Y_i - Y_{i-1}}$ を X_{i-1} 上の $\tilde{f}_{i-1}$（$i = 2$ のときは f）とつながるように，定めることができる。

同相写像 $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_i(x),\ (x \in X_i - X_{i-1} \text{のとき})$$

と定める。この $\tilde{f}$ をスメール（Smale）の馬蹄形写像という。

● 位相の強弱

連続性の定義は，X に開集合が多いほど，Y に開集合が少ないほど，$f : X \to Y$ は連続になりやすいということを示している。これを開集合が多いほど，空間は柔らかい。開集合が少ないほど，空間は硬い，と解釈する。一般には，位相の強弱といわれる。ほかにも，位相の粗密、濃淡といわれるこ

ともある。

$$
\begin{array}{rcl}
\text{“柔”} & \overset{\text{“連続”}}{\longrightarrow} & \text{“硬”} \\
\text{“密”} & \overset{\text{“連続”}}{\longrightarrow} & \text{“粗”} \\
\text{“濃”} & \overset{\text{“連続”}}{\longrightarrow} & \text{“淡”} \\
\text{“強”} & \overset{\text{“連続”}}{\longrightarrow} & \text{“弱”} \\
\text{“開集合が多い”} & \overset{\text{“連続”}}{\longrightarrow} & \text{“開集合が少ない”}
\end{array}
$$

定義　(位相の強弱) 集合 X 上に 2 つの位相 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ があるとき，$\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より**弱い**，**粗い**，または，$\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より**強い**，**細かい**，**密である**とは，$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ が成り立つとき。

例 5.8 (離散位相) 集合 X 上のもっとも強い位相は $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ のとき，すなわち，すべての部分集合が開集合のときである。各点がバラバラの孤立点と考えられ，**離散位相**といわれる。

例 5.9 (密着位相) 集合 X 上のもっとも弱い位相は $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ のとき，すなわち，空集合，全体集合以外の開集合のないときである。すべての点が硬くくっついた状態と考えられ，**密着位相**といわれる。

例 5.10 ソルゲンフレイ直線において，次が成り立つ。

(i) 恒等写像 $id : \mathbb{R}_{Sor} \to \mathbb{R}$ は連続で，$id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{Sor}$ は不連続である。すなわち，$\mathcal{O}_{Sor}$ は通常の距離位相より強い（軟らかい）。

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0), \\ 1 & (t \geqq 0) \end{cases}$$

とおくと，$f : \mathbb{R}_{Sor} \to \mathbb{R}$ は連続である。

(iii) $g(t) = f(-t)$ とおくと，$g : \mathbb{R}_{Sor} \to \mathbb{R}$ は不連続である。

定義　(像位相) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と写像 $f : X \to Y$ に対して，f が連続となるような Y の位相のうち，もっとも強いもの $\mathcal{O}_Y(f)$ が存在する。

$$\mathcal{O}_Y(f) = \left\{ V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X \right\}$$

$\mathcal{O}_Y(f)$ を $f : X \to Y$ による $\mathcal{O}_X$ の**像位相**という。

証明　$\mathcal{O}_Y(f)$ は (O1)，(O2)，(O3) を満たす。定義より明らかに最強である。
■

定義 **(下限位相)** 集合 X 上の位相の族 $\{\mathcal{O}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して，恒等写像 $1_\lambda : (X, \mathcal{O}_\lambda) \to (X, \mathcal{O})$ がすべて連続となるような X の位相のうち，もっとも強いもの $\mathcal{O} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ が存在する。$\{\mathcal{O}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の**下限位相**という。

証明 $\mathcal{O} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ を次のように定める。

$$\mathcal{O} = \{U \subset X \mid \forall \lambda \in \Lambda, U \in \mathcal{O}_\lambda\}$$

すると，$\mathcal{O}$ は (O1)，(O2)，(O3) を満たす。定義より明らかに，条件を満たすものの中でもっとも強いものである。■

定義 2 つの位相空間 X, Y に対して，集合 $X \cup Y$ と 2 点 $\{0, 1\}$ の直積をとり，その部分

$$X \amalg Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\} \subset (X \cup Y) \times \{0, 1\}$$

と写像

$$\begin{cases} i_1 : X \to X \amalg Y; & i_1(x) = (x, 0) \\ i_2 : Y \to X \amalg Y; & i_2(y) = (y, 1) \end{cases}$$

を考えて，$X \amalg Y$ に，i_1, i_2 を連続とするもっとも強い位相 $\mathcal{O}_{X \amalg Y}$ を定める。位相空間 $(X \amalg Y, \mathcal{O}_{X \amalg Y})$ を X と Y の**直和**という。

定理 26 直和 $X \amalg Y$ の部分空間 $i_1(X) = X \times \{0\}, i_2(Y) = Y \times \{1\}$ はともに閉かつ開集合で，i_1, i_2 はともに部分空間への同相写像である。

証明 $\mathcal{O}_{X \amalg Y} = \{i_1(U) \cup i_2(V) \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ であることより，明らかである。■

定理 27 連続写像 $f : X \to Z, g : Y \to Z$ に対して，連続写像 $f \amalg g : X \amalg Y \to Z$ で，$f \amalg g \circ i_1 = f, f \amalg g \circ i_2 = g$ を満たすものが一意的に定まる。

証明 条件より，$f \amalg g(x, 0) = f \amalg g \circ i_1(x) = f(x), f \amalg g(y, 1) = f \amalg g \circ i_2(y) = g(y)$ であるから，$f \amalg g$ は一意的である。連続性は位相の定義より従う。■

定義 **(逆位相)** 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ と写像 $f : X \to Y$ に対して，f が連続となるような X の位相のうち，もっとも弱いもの $\mathcal{O}_X(f^{-1})$ が存在する。

$$\mathcal{O}_X(f^{-1}) = \left\{f^{-1}(V) \subset X \mid V \in \mathcal{O}_Y\right\}$$

$\mathcal{O}_X(f^{-1})$ を $f : X \to Y$ による $\mathcal{O}_Y$ の**逆位相**という。

証明 $\mathcal{O}_X(f^{-1})$ は (O1)，(O2)，(O3) を満たす。定義より明らかにもっとも弱いものである。■

定義 (上限位相) 集合 X 上の位相の族 $\{\mathcal{O}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して，恒等写像 $1_\lambda : (X, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}_\lambda)$ がすべて連続となるような X の位相のうち，もっとも弱いもの $\mathcal{O} = \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ が存在する。$\{\mathcal{O}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の**上限位相**という。

証明 X の部分集合族 $\mathcal{SB} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ を次のように定める。

$$\mathcal{SB} = \{U \subset X \mid \exists\lambda \in \Lambda, U \in \mathcal{O}_\lambda\}$$

$\mathcal{SB}$ の生成する位相を $\mathcal{O} = \sup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ とおく。定義より明らかに，条件を満たすものの中で最弱である。■

問題

5.11 X, Y を位相空間とする。$f : X \to Y$ の連続性は，次の (a)，(b) のそれぞれと同値である。

(a) 任意の $B \subset Y$ に対して，$f^{-1}(\mathrm{Int}\, B) \subset \mathrm{Int}\left(f^{-1}(B)\right)$

(b) 任意の $B \subset Y$ に対して，$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$

それぞれ等号の成り立たない例を示せ。

5.12 X, Y を位相空間とする。$f : X \to Y$ の連続性は，次の (a)，(b) のそれぞれと同値である。

(a) 任意の $A \subset X$ に対して，$f(A^d) \subset \overline{f(A)}$

(b) 任意の $B \subset Y$ に対して，$\partial\left(f^{-1}(B)\right) \subset f^{-1}(\partial B)$

5.13 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ と部分集合 $A \subset X$ に対して

$$\mathcal{O}[A] = \{U \cup (V \cap A) \mid U, V \in \mathcal{O}\}$$

は A を開集合とし，$\mathcal{O}$ を含むもっとも弱い位相である。

5.14 X, Y を位相空間とする。全単射 $f : X \to Y$ が同相写像であるための必要十分条件は，Y の位相が，f を連続とするもっとも強い位相であることである。

5.15 X, Y を位相空間とする。X の部分集合 A, B に対して

$$A \cup B = X \text{ かつ } \overline{A - B} \cap (B - A) = (A - B) \cap \overline{B - A} = \emptyset$$

とする。$f : X \to Y$ に対して，$f|_A : A \to Y$ と $f|_B : B \to Y$ がともに連続ならば，f も連続である。

5.16

$$X_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}, \quad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$
$$Y_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x - 1 - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right\}, \quad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$$

とし，$f : Y \to X$ を $f(Y_n) = X_n$ で，同じ偏角の点を対応させるものとする。f は連続であることを示せ。f^{-1} は連続か。

5.17 さらに

$$Z_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-n)^2 + y^2 = n^2\}, \quad Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$$

とし，$g : Z \to Y$ を $g(Z_n) = Y_n$ で，同じ偏角の点を対応させるものとする。g は連続であることを示せ。g^{-1} は連続か。

5.18 重ねてさらに，ある距離空間 $[W, d]$ に対して，写像 $h : Z \to W$ は，各 n に対して制限 $h|Z_n$ が連続であっても，連続とは限らないことを示せ。

6 積空間

定義 (積空間) $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とするとき，直積 $X\times Y$ 上に

$$\mathcal{B}_{X\times Y}=\{U\times V\mid U\in\mathcal{O}_X, V\in\mathcal{O}_Y\}$$

を開基とする位相 $\mathcal{O}_{X\times Y}$ が定まる。$\mathcal{O}_{X\times Y}$ を**積位相**，$(X\times Y,\mathcal{O}_{X\times Y})$ を**積空間**という。

注意 一般に，ある集合の部分集合族に関して，それを開基とする位相は定まるとは限らない。しかし，それを準基とする位相は常に定まる。今の場合，$\mathcal{B}_{X\times Y}$ の有限個の共通部分は再び $\mathcal{B}_{X\times Y}$ に属する。

$$(U_1\times V_1)\cap\cdots\cap(U_k\times V_k)=(U_1\cap\cdots\cap U_k)\times(V_1\cap\cdots\cap V_k)$$

したがって，$\mathcal{B}_{X\times Y}$ を準基とする位相は，同じものを開基とする位相になっている。

例 6.1 平面 $\mathbb{R}^2$ には，ユークリッド距離による距離位相（通常の位相）と，数直線 $\mathbb{R}$ の積位相 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ との 2 つの位相が定まるが，これらは一致する。実際，前者は ε 円板 $N_\varepsilon(p)$ を基本近傍系とし，後者は δ 正方形 $S_\delta(p)=\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta\}$（ただし $p=(x_0,y_0)$）を基本近傍系とするが

$$N_\varepsilon(p)\subset S_\varepsilon(p)\subset N_{\sqrt{2}\,\varepsilon}(p)$$

であるから，2 つの位相は一致する。■

定理 28 $(X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする。射影 $p_1: X\times Y\to X$, $p_2: X\times Y\to Y$ を

$$p_1(p,q)=p,\ p_2(p,q)=q$$

とするとき，$\mathcal{O}_{X\times Y}$ に関して次が成り立つ。

(i) $p_1: X\times Y\to X$, $p_2: X\times Y\to Y$ は連続である。

(ii) $\mathcal{O}_{X\times Y}$ は $p_1: X\times Y\to X$, $p_2: X\times Y\to Y$ を共に連続とする，もっとも弱い位相である。

(iii) 任意の位相空間 $(Z,\mathcal{O}_Z)$ と写像 $g: Z\to X\times Y$ について，次は同値である：

$$g \text{ は連続} \iff p_1\circ g,\ p_2\circ g \text{ は共に連続}$$

証明 "(i)" $U\subset X$ を開集合とすると，$p_1^{-1}(U)=U\times Y\in\mathcal{O}_{X\times Y}$ である。また，$V\subset Y$ を開集合とすると，$p_2^{-1}(V)=X\times V\in\mathcal{O}_{X\times Y}$ である。

"(ii)" $\mathcal{O}$ を $X\times Y$ 上の位相で，$p_1: X\times Y\to X$, $p_2: X\times Y\to Y$ を共に連続とするものとすると，$p_1^{-1}(U)=U\times Y\in\mathcal{O}$ でなければならない。ま

た同様に，$p_2^{-1}(V) = X \times V \in \mathcal{O}$ でもある。よって，$U \times V \in \mathcal{O}$　したがって，$\mathcal{B}_{X\times Y} \subset \mathcal{O}$ となる。よって，$\mathcal{O}_{X\times Y} \subset \mathcal{O}$ である。

“(iii)” “$\Rightarrow$” は明らか。“$\Leftarrow$” を示す。$p_1 \circ g$ は連続であるから，$(p_1 \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(U \times Y) \in \mathcal{O}_Z$ が成り立つ。$p_2 \circ g$ は連続であるから，$(p_2 \circ g)^{-1}(V) = g^{-1}(X \times V) \in \mathcal{O}_Z$ も成り立つ。よって，$g^{-1}(U \times Y) \cap g^{-1}(X \times V) = g^{-1}(U \times V) \in \mathcal{O}_Z$ である。すなわち，$X \times Y$ の開基 $\mathcal{B}_{X\times Y}$ の g による引き戻しは Z の開集合である。したがって，それらの合併である $X \times Y$ の開集合の g による引き戻しも Z の開集合である。■

定理 29 X, Y を位相空間とし，$\{\mathcal{N}_X(p)\}, \{\mathcal{N}_Y(q)\}$ をそれぞれの基本近傍系とする。各点 $(p, q) \in X \times Y$ に対して

$$\mathcal{N}_{X\times Y}(p, q) = \{N_X \times N_Y \subset X \times Y \mid N_X \in \mathcal{N}_X(p), N_Y \in \mathcal{N}_Y(q)\}$$

とおくと，$\{\mathcal{N}_{X\times Y}(p, q)\}$ は積空間 $X \times Y$ の基本近傍系である。

証明　$(p, q) \in X \times Y$ とする。$\mathcal{N}_{X\times Y}(p, q)$ の元 $N_X \times N_Y$ が (p, q) の近傍であるのは明らかである。$W \subset X \times Y$ を (p, q) を含む開集合とすると，開集合 $U \subset X, V \subset Y$ で，$(p, q) \in U \times V \subset W$ となるものがある。$p \in U, q \in V$ であるから，それぞれの近傍 $N_X \in \mathcal{N}_X(p), N_Y \in \mathcal{N}_X(p)$ で，$N_X \subset U, N_Y \subset V$ となるものがある。したがって，$N_X \times N_Y \subset W$ である。■

定理 30　(i) $f : X_1 \to X_2,\ g : Y_1 \to Y_2$ を連続とすると，$(f \times g)(p, q) = (f(p), g(q))$ で定義される**積写像** $f \times g : X_1 \times Y_1 \to X_2 \times Y_2$ も連続である。

(ii) $\Delta(p) = (p, p)$ で定義される**対角線写像** $\Delta : X \to X \times X$ は連続である。

証明　それぞれ p_1, p_2 を合成して連続性を見る。

$$p_1 \circ (f \times g)(p, q) = f(p) = f \circ p_1(p, q),\ \ p_1 \circ \Delta(p) = p$$

p_2 も同様である。■

系　連続写像 $g_1 : Z \to X,\ g_2 : Z \to Y$ に対して，写像 $g : Z \to X \times Y$ を $g(x) = (g_1(p), g_2(x))$ で定めると，g は連続で $g_1 = p_1 \circ g,\ g_2 = p_2 \circ g$ である。■

定理 31 (部分空間の積空間) $A \subset X,\ B \subset Y$ とする。集合 $A \times B$ には 2 つの位相が定まるが，それらは一致する。すなわち，X の部分空間 A と Y の部分空間の積位相 $\mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_B$ と積空間 $X \times Y$ の相対位相 $\mathcal{O}_{A\times B}$ は一致する。

証明　2 つの位相空間 $(A \times B, \mathcal{O}_A \times \mathcal{O}_B)$ と $(A \times B, \mathcal{O}_{A\times B})$ の間の恒等写像 $1_{A\times B}$ が同相写像であることを示す。全単射は自明であるから，両方向の連続性を示せばよい。

“$1_{A\times B}:(A\times B,\mathcal{O}_A\times\mathcal{O}_B)\to(A\times B,\mathcal{O}_{A\times B})$ の連続性” 部分空間への連続性であるから，定理 20 より，全体空間 $X\times Y$ への連続性 $(A\times B,\mathcal{O}_A\times\mathcal{O}_B)\to X\times Y$ を見ればよい。両辺とも積位相で，写像は包含写像の積写像であるから，定理 27 より，包含写像の連続性に帰着する。

“$1_{A\times B}:(A\times B,\mathcal{O}_{A\times B})\to(A\times B,\mathcal{O}_A\times\mathcal{O}_B)$ の連続性” 積空間への連続性であるから，p_1,p_2 を合成して連続性 $p_1:(A\times B,\mathcal{O}_{A\times B})\to A,\ p_2:(A\times B,\mathcal{O}_{A\times B})\to B$ を見ればよい。どちらも同様であるから，$p_1:(A\times B,\mathcal{O}_{A\times B})\to A$ の連続性を見る。部分空間への写像であるから，全体空間 X への連続性を見ればよい。図式

$$\begin{array}{ccc} A\times B & \xrightarrow{i_{A\times B}} & X\times Y \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_1 \\ A & \xrightarrow{i_A} & X \end{array}$$

において，$i_A\circ p_1=p_1\circ i_{A\times B}$ であるが，$A\times B$ には相対位相が入っているから，右辺は連続である。■

定義 位相空間の間の写像 $f:X\to Y$ に関して：

(i) X の開集合 U の像 $f(U)\subset Y$ が開集合のとき，f を**開写像**という。

(ii) X の閉集合 F の像 $f(F)\subset Y$ が閉集合のとき，f を**閉写像**という。

例題 射影 p_1,p_2 は開写像であるが，閉写像でない。

証明 “前半” $W\subset X\times Y$ を開集合とし，$p\in p_1(W)$ とすると，ある $q\in Y$ に対し，$(p,q)\in W$　W は開集合であるから，ある $U\times V\in\mathcal{B}_{X\times Y}$ に対し，$(p,q)\in U\times V\subset W$　したがって，$p\in U$ で，$p_1(W)\supset p_1(U\times V)=U$　これは $p_1(W)$ が開，を示している。

“後半” $X=Y=\mathbb{R}$ とし，$Z\subset\mathbb{R}^2$ を

$$Z=\{(x,y)\mid x>0,y>0,xy=1\}$$

とおくと，$Z\subset\mathbb{R}^2$ は閉集合であるが，$p_1(Z)=(0,\infty)\subset\mathbb{R}$ は閉集合でない。■

例題 和，差，積は積空間 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への写像として連続である。■

定理 32 $y\in Y$ を固定するとき，写像 $i_1^{(y)}:X\to X\times Y$ を $i_1^{(y)}(x)=(x,y)$ で定めると，連続で，部分空間 $p_2^{-1}(y)=X\times\{y\}$ の上への同相写像を与える。

$$i_1^{(y)}:X\approx X\times\{y\}\subset X\times Y$$

証明 $i_1^{(y)}$ の連続性は明らか。逆写像は p_1 の制限である。■

その結果，$X\times Y$ は X と同相な部分空間 $X\times\{y\}$ たちで覆われる。

例 6.2 次の空間は同相である。

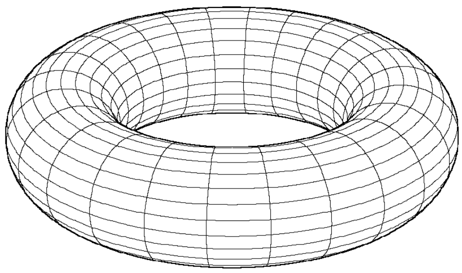
$$S^{n-1}\times\mathbb{R}\approx\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$$

証明 同相写像 h は $h((x_1,x_2,\dots,x_n),t)=(e^t\,x_1,e^t\,x_2,\dots,e^t\,x_n)$ で与えられる。■

例 6.3 曲面論のトーラス T^2 は $\mathbb{R}^3$ の部分空間として，単位円 2 つの積空間と同相である。対応は

$$\begin{array}{ccc}\begin{pmatrix}(R+r\cos u)\cos v\\(R+r\cos u)\sin v\\r\sin u\end{pmatrix} & \mapsto & ((\cos u,\sin u),(\cos v,\sin v))\\ \\ T^2 & \approx & S^1\times S^1\end{array}$$

で与えられる。■



2 個の位相空間の積が定義されると，帰納的に，n 個の位相空間の積が定義される。

$$X_1\times\cdots\times X_n=(X_1\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n$$

このとき，X_i の位相を $\mathcal{O}_i$ とおくと，$X_1\times\cdots\times X_n$ 上の位相は

$$\mathcal{B}_{X_1\times\cdots\times X_n}=\{U_1\times\cdots\times U_n\mid U_i\in\mathcal{O}_i,i=1,2,\dots n\}$$

を開基とする位相である。これは開集合の積を開集合とする位相である。

しかし，無限個の位相空間の積空間は，少し様子が異なる。集合族 $\{X_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ の積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ とは

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda=\left\{f:\Lambda\to\bigcup_\lambda X_\lambda\;\middle|\;f(\lambda)\in X_\lambda\right\}$$

と表される。すなわち，$\{X_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ の元とは，添え字集合 Λ 上の関数 f で，λ での値 $f(\lambda)$ が X_λ の元であるものである。通常，$f(\lambda)=x_\lambda$ として，f の代わりに，(x_λ) で表す。

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda=\{\,(x_\lambda)\mid x_\lambda\in X_\lambda\}$$

射影 $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ は

$$p_\lambda((x_\lambda)) = x_\lambda$$

と表される。

積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上の位相を，新たに次のように定義する。

定義 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ を位相空間の族とし，積集合の射影を $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ するとき，$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上の**積位相**とは

$$\mathcal{SB}_{\prod X_\lambda} = \{p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda, U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda\}$$

を準基とする位相である。

積位相の開基としては，たとえば，有限個の開集合と残りの全体集合との積全体が考えられる。

$$U_{\lambda_1} \times \cdots \times U_{\lambda_k} \times \prod_{\lambda\neq\lambda_1,\ldots,\lambda_k} X_\lambda = p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k})$$

注意 Λ が有限集合のとき，この定義は前の定義と一致する。Λ が無限集合のとき，無限個の λ に対して $U_\lambda \neq X_\lambda$ とすると，$\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は開集合でない。

定理 33 位相空間族 $(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)$ の積位相に関して次が成り立つ。

(i) $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ は連続である。

(ii) 積位相は，すべての $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ を連続とする，もっとも弱い位相である。

(iii) 任意の位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $g : Z \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ について，次は同値である：

$$g \text{ は連続} \iff \text{すべての } p_\lambda \circ g : Z \to X_\lambda \text{は連続}$$

証明 "(i)" $U_\lambda \subset X_\lambda$ を開集合とすると $p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{SB}_{\prod X_\lambda}$ である。

"(ii)" $\mathcal{O}$ を $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上の位相で，すべての $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ を連続にするものとすると，すべての λ に対して $p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{O}$ が成り立つ。すなわち，$\mathcal{SB}_{\prod X_\lambda} \subset \mathcal{O}$ である。したがって，積位相は $\mathcal{O}$ より弱い。

"(iii)" "$\Rightarrow$" は明らか。"$\Leftarrow$" を示す。$p_\lambda \circ g$ は連続であるから，$(p_\lambda \circ g)^{-1}(U_\lambda) = g^{-1}(p_\lambda^{-1}(U_\lambda)) \in \mathcal{O}_Z$ が成り立つ。すなわち，$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の準基 $\mathcal{B}_{\prod X_\lambda}$ の g による引き戻しは Z の開集合である。したがって，それらの有限共通部分の合併である $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の開集合の g による引き戻しも Z の開集合である。■

系　Z を位相空間とし，連続写像の族 $\{g_\lambda : Z \to X_\lambda\}$ に対して，写像 $g : Z \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $g(x) = (g_\lambda(x))$ で定めると，g は連続で $g_\lambda = p_\lambda \circ g$ である。■

ここで，すべての $\lambda \in \Lambda$ に対して，$X_\lambda = X$ という場合を考えてみよう。その場合，$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の代わりに X^Λ と書くのが自然である。ここで，X は位相空間であるが，Λ はただの集合で，位相は考えていない。その元 (x_λ) は，$f(\lambda) = x_\lambda$ という写像 $f : \Lambda \to X$ と考えることができる。そのとき，X^Λ は Λ から X への写像全体である。

$$X^\Lambda = \{f : \Lambda \to X\}$$

例 6.4 前章で，0 と 1 からなる無限列全体の集合 S を考えた。すべての $i = 1, 2, 3, \ldots \in \mathbb{N}$ に対し，$X_i = \{0, 1\} = 2$ とすると

$$S = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots = 2^{\mathbb{N}}$$

と考えることができる。$s = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$ に対し，$p_i(s) = s_i$ である。各 X_i に離散位相を考え，$S = 2^{\mathbb{N}}$ に積位相を定める。そのとき，前章のカントール集合との対応 $\varphi : C \to 2^{\mathbb{N}}$ は同相写像である。特に，離散空間の積空間 $2^{\mathbb{N}}$ は離散でない。

証明　p_i は i 番目の成分 s_i を対応させる写像である。φ の定義を思い出すと，$p_i \circ \varphi$ は C_{i-1} の 2^{i-1} 個の閉区間において，それぞれの真ん中の区間を除くとき，その右側に 1 を，左側に 0 を対応させる関数で，C_i の 2^i 個の閉区間に対し，左から $0, 1, 0, 1, \ldots$ とかわりばんこに番号をつけたものである。特に，C_i 上の関数として連続である。各 i に対し，$p_i \circ \varphi : C \to \{0, 1\} = 2$ は連続であるから，$\varphi : C \to 2^{\mathbb{N}}$ は連続である。

$\varphi^{-1} : 2^{\mathbb{N}} \to C$ の連続性を見る。$S = 2^{\mathbb{N}}$ の点 $s = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$ の基本近傍系として

$$N_i(s) = \{S \text{ の元で，} i \text{ 番目の成分まで } s \text{ と同じもの }\}$$

が選べる。$N_i(s)$ は φ^{-1} により C_i の 1 つの小区間に対応する。その幅は i と共にいくらでも小さくなることから，φ^{-1} の連続性がわかる。■

例 6.5 明らかに $S = 2^{\mathbb{N}}$ は等質である。したがって，カントール集合も等質である。一見，カントール集合の端点（可算個）とそうでない点（非可算個）とは性質が違うように思えるが，それらはカントール集合の自己同相写像で移り合う。■

例 6.6 積集合 $\mathbb{R}^I$ の元は区間 $I = [0, 1]$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ と考えることができる。すなわち，$f(t)$ を t 成分とする積集合 $\mathbb{R}^I$ の元 $(x_t) = (f(t))$ と考えることができる。

$\mathbb{R}^I$ に積位相を考えるとき，そこでの収束は，関数の各点収束に対応している。実際，$\mathbb{R}^I$ で $f_1, f_2, f_3, \ldots$ が f に収束しているとは，$\mathbb{R}^I$ における任意の f の近傍 $V(f)$ に対し，$i \geqq N$ ならば $f_i \in V(f)$ ということである。すなわち，任意に $t_1, \ldots, t_k$ と $\varepsilon_1 > 0, \ldots, \varepsilon_k > 0$ を与えるとき，$i \geqq N$ ならば $|f_i(t_1) - f(t_1)| < \varepsilon_1, \ldots, |f_i(t_k) - f(t_k)| < \varepsilon_k$ ということで，これは，各点収束である。■

例 6.7 離散位相をもつ自然数の集合 $\mathbb{N}$ の積空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の点は自然数列 $s = \{n_i\}$ である。その基本近傍系として，少し前の例 S と同様に

$$N_i(s) = \{\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ の元で，} i \text{ 番目の成分まで } s \text{ と同じもの }\}$$

が選べる。$s = \{n_i\}$ に対して，連分数

$$\varphi(s) = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4 + \cdots}}}$$

を対応させる写像 φ は $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ から 1 より大きい無理数全体 $(1, \infty) - \mathbb{Q}$ の上への同相写像 $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to (1, \infty) - \mathbb{Q}$ を与える。■

• ホモトピー

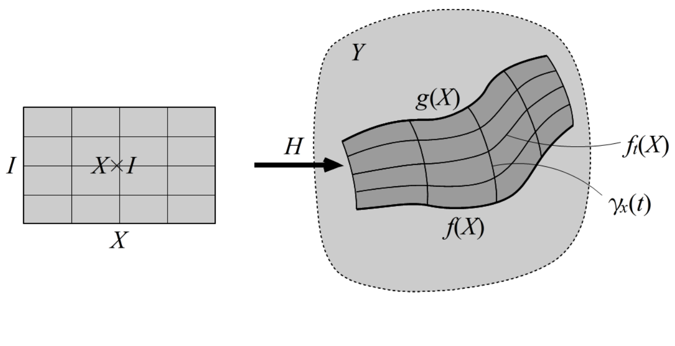
定義　位相空間 X から Y への 2 つの連続写像 $f, g : X \to Y$ が**ホモトピック**であるとは，連続写像 $H : X \times I \to Y$ で，任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{cases} H(x, 0) = f(x) \\ H(x, 1) = g(x) \end{cases}$$

を満たすものが存在するときとする。このことを

$$f \simeq g : X \to Y$$

と表す。また，このような写像 H を**ホモトピー**という。

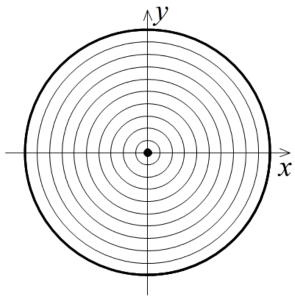


$t \in I$ に対して，$f_t(x) = H(x,t)$ とおくと，$f = f_0$，$g = f_1$ で，$f_t : X \to Y$ は f から g に，時刻 t と共に，連続的に変化する X から Y への連続写像を与えている。

$x \in X$ に対して，$\gamma_x(t) = H(x,t)$ とおくと，$\gamma_x : I \to Y$ は Y の道で，始点 $f(x)$ と終点 $g(x)$ を結んでいる。

例 6.8 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ から $\mathbb{R}^2$ への包含写像 i は定値写像 $c_0(x,y) = \mathbf{0}$ とホモトピックである。

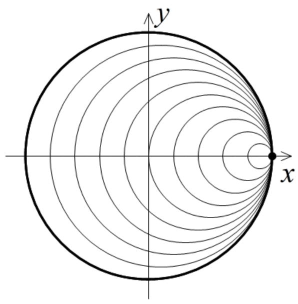
$$i \simeq c_0 : S^1 \to \mathbb{R}^2$$



実際，ホモトピーは $H(x,y,t) = ((1-t)x, (1-t)y)$ で与えられる。

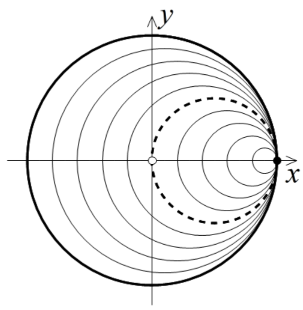
例 6.9 $i : S^1 \to \mathbb{R}^2$ は $(1,0)$ への定値写像 c_1 ともホモトピックである。

$$i \simeq c_1 : S^1 \to \mathbb{R}^2$$



しかし，ここで値域を $\mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$ に変えるとホモトピックでない。

$$i \not\simeq c_1 : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}$$



この最後の事実は，現時点では明らかではない。後に議論する。

定理 34 X から Y への連続写像全体において，ホモトピックという関係は同値関係である。

(i) $f \simeq f$

(ii) $f \simeq g \quad \Rightarrow \quad g \simeq f$

(iii) $f \simeq g,\ g \simeq h \quad \Rightarrow \quad f \simeq h$

証明 以下のように，ホモトピーを構成して示す。

(i) $F(x,t) = f(x)$ とおけば，F は $f \simeq f$ のホモトピーである。

(ii) F を $f \simeq g$ のホモトピーとする。$G(x,t) = F(x, 1-t)$ とおけば，G は $g \simeq f$ のホモトピーである。

(iii) F, G をそれぞれ $f \simeq g,\ g \simeq h$ のホモトピーとする。

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\right) \\ G(x, 2t-1) & \left(\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right) \end{cases}$$

とおけば，H は $f \simeq h$ のホモトピーである。■

定義 X から Y への連続写像全体において，ホモトピックという同値関係による同値類を**ホモトピー類**という。

定理 35 $\begin{cases} f \simeq f' : X \to Y \\ g \simeq g' : Y \to Z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g \circ f \simeq g' \circ f' : X \to Z$

証明 F, G をそれぞれ $f \simeq f',\ g \simeq g'$ のホモトピーとすると

$$H(x,t) = G(F(x,t), t)$$

は求めるホモトピーである。実際

$$\begin{cases} H(x,0) = G(F(x,0),0) = G(f(x),0) = g(f(x)) = g\circ f(x) \\ H(x,1) = G(F(x,1),1) = G(f'(x),1) = g'(f'(x)) = g'\circ f'(x) \end{cases}$$

で，H の連続性は

$$G(F(x,t),t) = G((F\times 1)(x,t,t)) = G((F\times 1)((1\times\Delta)(x,t)))$$

より，$H = G\circ(F\times 1)\circ(1\times\Delta)$ と分解されるからである。

$$H : X\times I \xrightarrow{1\times\Delta} X\times I\times I \xrightarrow{F\times 1} Y\times I \xrightarrow{G} Z \qquad \blacksquare$$

S^1 から S^1 への連続写像全体のホモトピー類を調べる。その準備として，$\boldsymbol{p}_\pm = (\pm 1, 0)\in S^1$ とおき，$p:\mathbb{R}\to S^1$ を $p(t) = (\cos t, \sin t)$ と定める。すると

$$\begin{cases} p|_{(-\pi,\pi)} : (-\pi,\pi)\to S^1 - \{\boldsymbol{p}_-\} \\ p|_{(0,2\pi)} : (0,2\pi)\to S^1 - \{\boldsymbol{p}_+\} \end{cases}$$

は同相写像である。その逆写像を，それぞれ

$$\begin{cases} s_+ : S^1 - \{\boldsymbol{p}_-\}\to(-\pi,\pi) \\ s_- : S^1 - \{\boldsymbol{p}_+\}\to(0,2\pi) \end{cases}$$

とおく。

補題　連続写像 $f : S^1\to S^1$ に対し，$p(s_0) = f(\boldsymbol{p}_+)$ となる $s_0\in\mathbb{R}$ を選ぶと，$p\circ\tilde{f} = f\circ p$ を満たす連続写像 $\tilde{f} : [0,2\pi]\to\mathbb{R}$ で，$\tilde{f}(0) = s_0$ となるものが存在する。

$$\begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \downarrow^{p} & & \downarrow^{p} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

証明　$[0,2\pi]$ は閉区間であるから，$f\circ p : [0,2\pi]\to S^1$ は一様連続である。したがって，ある $\varepsilon > 0$ で，$|t-s| < \varepsilon \Rightarrow d(f\circ p(t), f\circ p(s)) < 2$ が成り立つものが存在する。$[0,2\pi]$ を N 等分して，分点を $0 = t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = 2\pi$ とおき，$t_k - t_{k-1} < \varepsilon$ とする。仮定より，像 $f\circ p([t_{k-1},t_k])$ は長さが π より小さい弧（劣弧）に含まれる。したがって

$$\begin{cases} f\circ p([t_{k-1},t_k])\subset S^1 - \{\boldsymbol{p}_-\} \quad \text{または} \\ f\circ p([t_{k-1},t_k])\subset S^1 - \{\boldsymbol{p}_+\} \end{cases}$$

が成り立つ。それに応じて，$\tilde{f}_k : [t_{k-1},t_k]\to\mathbb{R}$ を

$$\tilde{f}_k = \begin{cases} s_+\circ f\circ p|_{[t_{k-1},t_k]} \quad \text{または} \\ s_-\circ f\circ p|_{[t_{k-1},t_k]} \end{cases}$$

と定める。どちらの場合でも $\tilde{f}_k$ は連続で $p \circ \tilde{f}_k = f \circ p|_{[t_{k-1},t_k]}$ である。$d_0 = s_0 - \tilde{f}_1(0)$ とおき，各 $k = 1, 2, \ldots, N-1$ に対し

$$d_k = \tilde{f}_{k+1}(t_k) - \tilde{f}_k(t_k)$$

とおく。d_k は $-2\pi, 0, 2\pi$ のいずれかである。そこで，$t \in [t_{k-1}, t_k]$ に対して

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}_k(t) + d_0 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{k-1}$$

とおけば，$\tilde{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ は連続で，$\tilde{f}(0) = s_0$ と $p \circ \tilde{f} = f \circ p$ を満たす。■

補題　連続写像 $f : S^1 \to S^1$ に対し，$p \circ \tilde{f} = f \circ p,\ p \circ \tilde{f}' = f \circ p$ を満たす 2 つの連続写像 $\tilde{f}, \tilde{f}' : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ で，ある $t_0 \in [0, 2\pi]$ に対し，$\tilde{f}(t_0) = \tilde{f}'(t_0)$ となれば，$\tilde{f} = \tilde{f}'$ である。

証明　すべての $t \in [0, 2\pi]$ に対し，$p(\tilde{f}(t)) = p(\tilde{f}'(t)) = f \circ p(t)$ であるから，ある $n \in \mathbb{Z}$ が存在して，$\tilde{f}(t) - \tilde{f}'(t) = 2n\pi$ である。連続性より，$n \in \mathbb{Z}$ は $t \in [0, 2\pi]$ によらず一定である。ある $t_0 \in [0, 2\pi]$ に対し，$\tilde{f}(t_0) - \tilde{f}'(t_0) = 0$ であるから，$n = 0$ である。■

定義　連続写像 $f : S^1 \to S^1$ に対し，$p \circ \tilde{f} = f \circ p$ を満たす連続写像 $\tilde{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ を選ぶとき，f の**次数** $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ を

$$\deg(f) = \frac{\tilde{f}(2\pi) - \tilde{f}(0)}{2\pi}$$

で定めることができる。

問 6.10 整数 p に対して，正則関数 $w = z^p$ を単位円上に制限して，連続写像 $f : S^1 \to S^1$ と思うとき，$\deg(f) = p$ である。

定理 36 S^1 から S^1 への連続写像に関して，次数はホモトピー不変量である。すなわち

$$f \simeq g : S^1 \to S^1 \ \Rightarrow\ \deg(f) = \deg(g)$$

証明　前々補題と同じような流れの証明を行う。$f \simeq g$ を与えるホモトピーを $H : S^1 \times I \to S^1$ とする。ホモトピー $F : [0, 2\pi] \times I \to \mathbb{R}$ で，$p \circ F = H \circ (p \times 1)$ を満たすものを構成する。

$$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi] \times I & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \\ \downarrow^{p \times 1} & & \downarrow^{p} \\ S^1 \times I & \xrightarrow{H} & S^1 \end{array}$$

長方形 $[0, 2\pi] \times I$ はコンパクトであるから，$H \circ (p \times 1) : [0, 2\pi] \times I \to S^1$ は一様連続である。したがって，ある $\varepsilon > 0$ で

$$\sqrt{(t - t')^2 + (s - s')^2} < \varepsilon \Rightarrow d(H(p(t), s), H(p(t'), s')) < 2$$

が成り立つものが存在する。$[0, 2\pi]$ と I を N 等分して，分点を

$$0 = t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N = 2\pi;\ 0 = s_0, s_1, \ldots, s_{N-1}, s_N = 1$$

とおき，$\sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 + (s_j - s_{j-1})^2} < \varepsilon$ とする。仮定より，像

$$H \circ (p \times 1)\,([t_{k-1}, t_k] \times [s_{j-1}, s_j])$$

は長さが π より小さい弧（劣弧）に含まれる。したがって

$$\begin{cases} H \circ (p \times 1)\,([t_{k-1}, t_k] \times [s_{j-1}, s_j]) \subset S^1 - \{\boldsymbol{p}_-\} & \text{または} \\ H \circ (p \times 1)\,([t_{k-1}, t_k] \times [s_{j-1}, s_j]) \subset S^1 - \{\boldsymbol{p}_+\} \end{cases}$$

が成り立つ。それに応じて，$F_{k,j} : [t_{k-1}, t_k] \times [s_{j-1}, s_j] \to \mathbb{R}$ を

$$F_{k,j} = \begin{cases} s_+ \circ H \circ (p \times 1)|_{[t_{k-1}, t_k] \times [s_{j-1}, s_j]} & \text{または} \\ s_- \circ H \circ (p \times 1)|_{[t_{k-1}, t_k] \times [s_{j-1}, s_j]} \end{cases}$$

と定める。どちらの場合でも $F_{k,j}$ は連続で

$$p \circ F_{k,j} = H \circ (p \times 1)|_{[t_{k-1}, t_k] \times [s_{j-1}, s_j]}$$

である。各 $k, j = 1, 2, \ldots, N-1$ に対し

$$d_{k,j}(s) = F_{k+1,j}(t_k, s) - F_{k,j}(t_k, s) \quad (s \in [s_{j-1}, s_j])$$

とおくと，関数 $d_{k,j}$ は $[s_{j-1}, s_j]$ 上連続で，その値 $d_{k,j}(s)$ は $-2\pi, 0, 2\pi$ のいずれかである。したがって，$d_{k,j} = d_{k,j}(s)$ は $s \in [s_{j-1}, s_j]$ によらず一定である。また，同様に

$$d'_{k,j}(t) = F_{k,j+1}(t, s_j) - F_{k,j}(t, s_j) \quad (t \in [t_{k-1}, t_k])$$

とおくと，関数 $d'_{k,j}$ は $[t_{k-1}, t_k]$ 上連続で，その値 $d'_{k,j}(t)$ は $-2\pi, 0, 2\pi$ のいずれかである。したがって，$d'_{k,j} = d'_{k,j}(t)$ は $t \in [t_{k-1}, t_k]$ によらず一定である。そして

$$\begin{aligned} d_{k,j} + d'_{k+1,j} &= F_{k+1,j}(t_k, s_j) - F_{k,j}(t_k, s_j) \\ &\qquad + F_{k+1,j+1}(t_k, s_j) - F_{k+1,j}(t_k, s_j) \\ &= F_{k+1,j+1}(t_k, s_j) - F_{k,j}(t_k, s_j) \\ &= F_{k,j+1}(t_k, s_j) - F_{k,j}(t_k, s_j) \\ &\qquad + F_{k+1,j+1}(t_k, s_j) - F_{k,j+1}(t_k, s_j) \\ &= d'_{k,j} + d_{k,j+1} \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで，$(t, s) \in [t_{k-1}, t_k] \times [s_{j-1}, s_j]$ に対して

$$F(t, s) = F_{k,j}(t, s) + d_{1,1} + \cdots + d_{k-1,1} + d'_{k,1} + \cdots + d'_{k,j-1}$$

とおけば，$F:[0,2\pi]\times I\to\mathbb{R}$ は連続で，$p\circ F=H\circ(p\times 1)$ を満たす。ここで

$$\begin{cases} \tilde{f}(t)=F(t,0) \\ \tilde{g}(t)=F(t,1) \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{cases} p\circ\tilde{f}(t)=p\circ F(t,0)=H(p(t),0)=f(p(t))=f\circ p(t) \\ p\circ\tilde{g}(t)=p\circ F(t,1)=H(p(t),1)=g(p(t))=g\circ p(t) \end{cases}$$

である。よって，次が成り立つ。

$$\begin{cases} \deg(f)=\dfrac{F(2\pi,0)-F(0,0)}{2\pi} \\ \deg(g)=\dfrac{F(2\pi,1)-F(0,1)}{2\pi} \end{cases}$$

一方，$s\in[0,1]$ に対して

$$\begin{aligned} p(F(0,s)) &= p\circ F(0,s)=H\circ(p\times 1)(0,s)=H(p(0),s) \\ &= H(p(2\pi),s)=H\circ(p\times 1)(2\pi,s)=p\circ F(2\pi,s) \\ &= p(F(2\pi,s)) \end{aligned}$$

であるから，ある $n\in\mathbb{Z}$ が存在して，$F(2\pi,s)-F(0,s)=2n\pi$ である。F の連続性より，$n\in\mathbb{Z}$ は $s\in[0,1]$ によらず一定である。この n が $\deg(f)=\deg(g)$ である。■

問 6.11 例 **6.9** の後半を示せ。

問題

6.12 X,Y を位相空間とする。$A\subset X$，$B\subset Y$ に対して，次を示せ。

$$\partial(A\times B)=(\partial A\times B)\cup(A\times\partial B)$$

- $A\subset X\times Y$ と $x\in X$ に対し，$A(x)\subset Y$ を

$$A(x)=\{y\in Y\mid (x,y)\in A\}$$

とする。さらに，$V\subset X$ に対し，$A(V)\subset Y$ を

$$A(V)=\bigcup_{x\in V}A(x)=\{y\in Y\mid \exists x\in V;(x,y)\in A\}$$

とする。

問 6.13 記号 $A(x)$ は関数記号 $f(x)$ と類似である。説明せよ。

6.14 $A \subset X \times Y$ を閉集合とする。$x \in X$ に対し，$U \subset X$ が x を含む開集合全体を動くとき，次を示せ。

$$A(x) = \bigcap_{x \in U:\text{open}} \overline{A(U)}$$

6.15 $B \subset X \times Y$ を開集合とする。$x \in X$ に対し，$U \subset X$ が x を含む開集合全体を動くとき，次の反例を示せ。

$$\overline{B(x)} = \bigcap_{x \in U:\text{open}} B(U)$$

- $A \subset X \times Y$ と $B \subset Y \times Z$ に対し，$B \circ A \subset X \times Z$ を

$$B \circ A = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y; (x, y) \in A, (y, z) \in B\}$$

  とする。

問 6.16 記号 $B \circ A$ は合成関数記号 $g \circ f(x)$ と類似である。説明せよ。

6.17 $A \subset X \times Y$ も $B \subset Y \times Z$ も開集合とすると，$B \circ A \subset X \times Z$ も開集合である。

6.18 位相空間 X, Y, P と連続写像 $p : P \to X,\ q : P \to Y$ が次の性質を満たしているとする。すなわち，任意の位相空間 A と連続写像 $f : A \to X,\ g : A \to Y$ に対して，連続写像 $h : A \to P$ で $p \circ h = f$ かつ $q \circ h = g$ となるものがちょうどひとつだけ存在するものとする。そのとき，P と $X \times Y$ のあいだには同相写像が存在することを示せ。

6.19 連続写像の族 $\{p_\lambda : P \to X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が次の性質を満たしているとする。すなわち，任意の位相空間 A と連続写像の族 $\{f_\lambda : A \to X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して，連続写像 $h : A \to P$ で $p_\lambda \circ h = f_\lambda (\forall \lambda \in \Lambda)$ となるものがちょうどひとつだけ存在するものとする。そのとき，P と $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ のあいだには同相写像が存在することを示せ。

- 位相空間 X が**自明なホモトピー型をもつ**とは，ある 1 点 $x_0 \in X$ に対して，定値写像 c_{x_0} と 1_X がホモトピックなときとする。さらに，そのホモトピー $H : X \times I \to X$ が $H(x_0, t) = x_0$ を満たすとき，X は**可縮**であるという。

6.20 カントール集合 $C \subset I$ の錐（すい）$\text{Cone}(C)$ を

$$\text{Cone}(C) = \{(tx, 1 - t) \mid x \in C, 0 \leqq t \leqq 1\}$$

と定め，$n \in \mathbb{Z}$ に対し，y 方向の n だけの平行移動を ${\tau_y}^n$ で表すとき

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} {\tau_y}^n(\mathrm{Cone}(C))$$

とする。

(i) X の概形を描け。

(ii) X の中で y 座標を s だけ増やす写像 $f_s : X \to X$ は連続である。

(iii) X は自明なホモトピー型をもつが可縮ではない。

7 商空間

定義 (商空間) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，“$\sim$” を X 上の同値関係とする。$X/\sim$ を商集合，$\pi : X \to X/\sim$ を標準射影とする。そのとき $X/\sim$ 上の位相 $\mathcal{O}_{X/\sim}$ を

$$\mathcal{O}_{X/\sim} = \{U \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}\}$$

とおくと，これは $X/\sim$ 上の位相となる。これを $X/\sim$ 上の**商位相**といい，位相空間 $(X/\sim, \mathcal{O}_{X/\sim})$ を**商空間**という。

証明 ($\mathcal{O}_{X/\sim}$ が位相であること) 開集合の公理 (O1), (O2), (O3) を満たすことを確かめる。容易である。■

注意 X の部分集合 A が，同値関係 “$\sim$” で閉じている，とは，条件 “$p \in A, p \sim q \Rightarrow q \in A$” を満たすとき。写像 π により，X の “$\sim$” で閉じた開集合と商空間 $X/\sim$ の開集合とは $1:1$ に対応する。

定理 37 商集合 $X/\sim$ 上の商位相 $\mathcal{O}_{X/\sim}$ に関して次が成り立つ。

(i) $\pi : X \to X/\sim$ は連続である。

(ii) 商位相は $\pi : X \to X/\sim$ を連続とする，もっとも強い位相である。

(iii) 任意の位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と写像 $g : X/\sim \to Z$ について，次は同値である：

$$g \text{ は連続} \iff g \circ \pi : X \to Z \text{ は連続}$$

証明 “(i)” $\mathcal{O}_{X/\sim}$ の定義により明らか。

“(ii)” $\mathcal{O}'$ を $X/\sim$ 上の位相で，$\pi : X \to X/\sim$ を連続とするものとする。$U' \in \mathcal{O}'$ に対して，$\pi^{-1}(U')$ は開である。したがって，$\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}_{X/\sim}$ となる。

“(iii)” “$\Rightarrow$” は明らか。“$\Leftarrow$” を示す。$W \in \mathcal{O}_Z$ とすると，$(g \circ \pi)^{-1}(W)$ は開である。$(g \circ \pi)^{-1}(W) = \pi^{-1}(g^{-1}(W))$ であるから，$g^{-1}(W) \in \mathcal{O}_{X/\sim}$ である。■

例 7.1 $(X, \mathcal{O})$ として数直線 $\mathbb{R}$，その上の同値関係を

$$s \sim t \iff s - t \in \mathbb{Z}$$

とする。同値類 $[t]$ に対して円周 S^1 上の点 $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ を対応させると商空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と S^1 との同相写像を定める。

証明 商空間 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の開集合は，$\mathbb{R}$ の $\sim$ で閉じた開集合と対応するから，それは $\mathbb{R}$ の，$n \in \mathbb{Z}$ だけの平行移動で不変な開集合である。したがって，点 $[t] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の基本近傍系は $\mathbb{R}$ の開集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(t+n-\varepsilon, t+n+\varepsilon)$ で与えられる。それは，S^1 の点 $(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ の開近傍 $\{(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \mid t - \varepsilon < x < t + \varepsilon\}$ に対応している。■

問 7.2 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は開写像であるが，閉写像でない。

例 7.3 $(X, \mathcal{O})$ として長方形 $[-1,1] \times [0, 2\pi]$，その上の同値関係を

$$(u, 0) \sim (-u, 2\pi), \forall u \in [-1, 1]$$

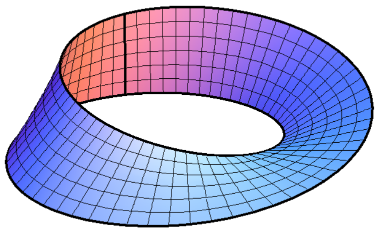
とする。商空間 $X/\sim$ は**メビウスの帯**といわれる。

問 7.4 メビウスの帯 $X/\sim$ の各点の基本近傍系を求めよ。

例題　メビウスの帯 $X/\sim$ からユークリッド空間への写像 $\varphi : X/\sim \to \mathbb{R}^3$ を

$$\varphi(u, v) = \left(\left(3 + u\cos\frac{v}{2}\right)\cos v, \left(3 + u\cos\frac{v}{2}\right)\sin v, u\sin\frac{v}{2}\right)$$

と定めると，φ はメビウスの帯から $\mathbb{R}^3$ の部分空間への同相写像を定める。



証明　φ は商空間からの写像であるから，その連続性長方形 $[-1,1] \times [0, 2\pi]$ からの写像 $\varphi \circ \pi$ の連続性より従う。逆の連続性は $\mathbb{R}^3$ を 2 つの閉集合 "$y \geqq 0$" と "$y \leqq 0$" に分割すると，それぞれの上で，φ^{-1} は，長方形 $[-1,1] \times [0, 2\pi]$ への写像として連続である。■

例 7.5 $X = S^1 \times [0, 1]$ において同値関係を

$$(\cos u, \sin u, 0) \sim (-\cos u, -\sin u, 0), \forall u$$

とする。商空間 $X/\sim$ はメビウスの帯と同相である。

定義　位相空間 X, Y と部分空間 $A \subset X, B \subset Y$ があり，$h : A \to B$ を同相写像とする。そのとき，位相空間 X と Y を h で**貼り合わせた空間** $X \cup_h Y$ とは，商空間

$$X \cup_h Y = X \amalg Y/\sim;\ x \sim h(x)\ (\forall x \in A)$$

をいう。

定理 38 $\pi \circ i_1 : X \to X \amalg Y \to X \cup_h Y$, $\pi \circ i_2 : Y \to X \amalg Y \to X \cup_h Y$ は，それぞれ X, Y から $X \cup_h Y$ の部分空間の上への同相写像である。

証明 π も i_1 も連続であるから，$\pi\circ i_1$ も連続である。明らかに単射であるから，開写像であることを見ればよい。X の開集合 U に対して，$\pi\circ i_1(U)$ が $\pi\circ i_1(X)$ の相対位相で開であればよい。$X\cup_h Y$ の開集合 W で，$\pi\circ i_1(U)=\pi\circ i_1(X)\cap W$ となるものがあればよい。$\pi^{-1}W$ を考えれば，$X\amalg Y=X\times\{0\}\cup Y\times\{1\}$ の開集合 $\pi^{-1}W=U\times\{0\}\cup V\times\{1\}$ で，同値関係 $\sim$ に関して閉じているものがあればよい。今，$U\cap A$ は A の開集合で，h は同相写像であるから，$h(U\cap A)$ は B の開集合である。したがって，Y の開集合 V で，$V\cap B=h(U\cap A)$ となるものがある。この V は求めるものである。$\pi\circ i_2$ についても同様である。
■

例 7.6 n 次元円板 D^n の 2 つのコピーを $D^n_{\pm}$ とし，それに含まれる $n-1$ 次元球面を $S^{n-1}_{\pm}$ とする。貼り合わせ写像を恒等写像 $\mathrm{id}:S^{n-1}_{+}\to S^{n-1}_{-}$ とすると，$D^n_{+}\cup_{\mathrm{id}}D^n_{-}$ は n 次元球面 S^n と同相である。

例 7.7 原点を除いた n 次元ユークリッド空間の反転 $\mathrm{inv}:\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}\to\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$ を

$$\mathrm{inv}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^2}\,\boldsymbol{x}$$

で定める。$\mathbb{R}^n$ の 2 つのコピー $\mathbb{R}^n_{\pm}$ を inv で貼り合わせて得られる空間 $\mathbb{R}^n_{+}\cup_{\mathrm{inv}}\mathbb{R}^n_{-}$ は n 次元球面 S^n と同相である。

定義 位相空間 X と部分集合 $A\subset X$ に対し，A の点をすべて同値と考える同値関係を

$$p\sim_A q \iff p=q \text{ または } p,q\in A$$

により定める。このときの商空間を A を **1 点につぶした空間**といい，$X/*_A$ で表す。（他書では $X/*_A$ を X/A と表すことも多いが，本書では $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\approx S^1$ と $\mathbb{R}/*_{\mathbb{Z}}$ との違いを表すためにこの記号を用いる。）

また，同値類 A の定める $X/*_A$ の点を $*_A$ で表す。

問 7.8 $X/*_A$ の点 $*_A$ に対して，$\{\pi(U)\subset X \mid U \text{ は } A \text{ を含む } X \text{ の開集合}\}$ は基本近傍系である。

例 7.9 $[0,1]/*_{\{0,1\}}\approx S^1\approx\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ である。

例 7.10 円周 S^1 は閉円板 D^2 の部分集合である。1 点につぶした空間 $D^2/*_{S^1}$ は 2 次元球面 S^2 と同相である。

例 7.11 位相空間 X に対し，積空間 $X\times[0,1]$ の部分集合 $X\times\{1\}$ を 1 点につぶした空間を X の**錐**という。$\mathrm{Cone}(X)$ で表す。$\mathrm{Cone}(S^1)\approx D^2$ である。

• 射影空間 $P^n(\mathbb{R}), P^n(\mathbb{C})$

定義 $\mathbb{R}^{n+1}$ に含まれる原点 $\mathbf{0}$ を通る直線全体のつくる集合

$$P^n(\mathbb{R}) = \{L \mid L \text{ は } \mathbb{R}^{n+1} \text{ の } 1 \text{ 次元部分空間}\}$$

を n **次元実射影空間**という。同じく，$\mathbb{C}^{n+1}$ の複素 1 次元部分空間全体

$$P^n(\mathbb{C}) = \{L \mid L \text{ は } \mathbb{C}^{n+1} \text{ の複素 } 1 \text{ 次元部分空間}\}$$

を n **次元複素射影空間**という。

ここで，$\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ に，$\boldsymbol{x}$ で生成される 1 次元部分空間を対応させると，全射

$$\begin{cases} p : \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \to P^n(\mathbb{R}) \\ p_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \to P^n(\mathbb{C}) \end{cases}$$

を得る。さらに

$$\begin{cases} p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{x}') \iff \boldsymbol{x}' = r\boldsymbol{x} \ (\exists r \in \mathbb{R} - \{0\}) \\ p_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x}) = p_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x}') \iff \boldsymbol{x}' = c\boldsymbol{x} \ (\exists c \in \mathbb{C} - \{0\}) \end{cases}$$

も成り立つ。したがって，これらの条件により同値関係 $\sim$, $\sim_{\mathbb{C}}$ を

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{x}' \iff \boldsymbol{x}' = r\boldsymbol{x} \ (\exists r \in \mathbb{R} - \{0\}) \\ \boldsymbol{x} \sim_{\mathbb{C}} \boldsymbol{x}' \iff \boldsymbol{x}' = c\boldsymbol{x} \ (\exists c \in \mathbb{C} - \{0\}) \end{cases}$$

と定めると，$1:1$ 対応

$$\begin{cases} P^n(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\})/\sim \\ P^n(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\})/\sim_{\mathbb{C}} \end{cases}$$

が与えられる。

$\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ を通る直線 L を記号 $(x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1})$ で表す。直線 L の**同次座標**という。すると

$$\begin{cases} p(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}) \\ p_{\mathbb{C}}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}) \end{cases}$$

が成り立つ。

商集合 $(\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\})/\sim$, $(\mathbb{C}^{n+1} - \{\mathbf{0}\})/\sim_{\mathbb{C}}$ に，商位相を導入し，対応する射影空間 $P^n(\mathbb{R}), P^n(\mathbb{C})$ の位相とする。

例 7.12 $P^1(\mathbb{R})$ は円周 S^1 と同相である：$P^1(\mathbb{R}) \approx S^1$

証明 $p : \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \to P^1(\mathbb{R})$ を単位半円 $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ に制限すると，全射で，端点以外では $1:1$ である。両端では $2:1$ である。したがって，$P^1(\mathbb{R})$ は閉区間 $[0, \pi]$ の両端点を同一視して得られる空間と同相である。それは円周 S^1 である。

例 7.13 $P^2(\mathbb{R})$ は円板とメビウスの帯を境界で貼り付けて得られる曲面と同相である。

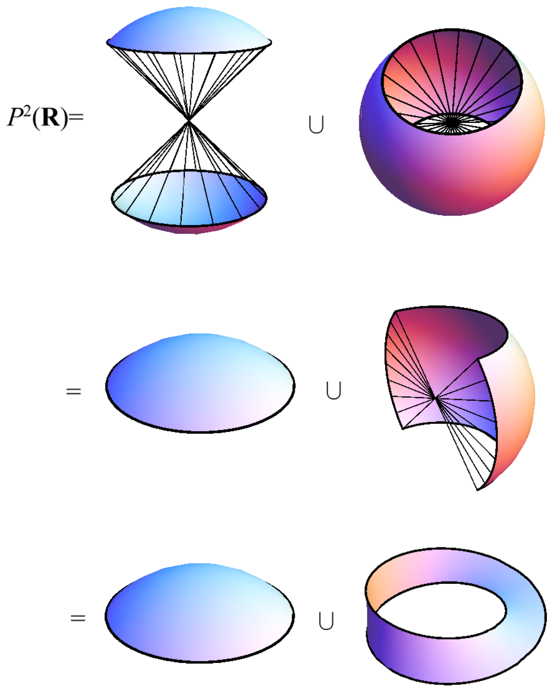
証明 $p:\mathbb{R}^3-\{\mathbf{0}\}\to P^2(\mathbb{R})$ を単位球面 S^2 に制限すると，全射 $p|_{S^2}:S^2\to P^2(\mathbb{R})$ が得られる。単射でなく 2 : 1 写像で，$p(x)=p(y) \iff y=\pm x$ である。S^2 上で緯度経度パラメータを考えよう。北緯 45° 以上の部分を A_+、南緯 45° 以下部分を A_- とおき、北緯 45° と南緯 45° にはさまれた部分を A_E とおく。$B\subset P^2(\mathbb{R})$ を $B=p|_{S^2}(A_+)=p|_{S^2}(A_-)$ とおくと、$A_\pm$ 上 $p|_{S^2}$ は同相写像であるから，B は円板と同相である。

$$B\approx A_+\approx A_-\approx \text{“円板”}$$

$C\subset P^2(\mathbb{R})$ を $C=p|_{S^2}(A_E)$ とおくと、$P^2(\mathbb{R})=B\cup C$ である。$p|_{S^2}$ は A_E 上 2 : 1 であるので、さらに、A_{E+} を A_E のうち東経 0° から 180° までの部分とする。$C=p|_{S^2}(A_{E+})$ であるが、A_{E+} のうち、$p|_{S^2}$ で同じ点に写るのは東経 0° のところと 180° のところだけで、0° のところの上向き矢印が 180° のところの下向き矢印と重なるように写される。したがって、C は A_{E+} の 2 つの矢印を貼り合わせたものと同相である。すなわちメビウスの帯と同相である。

$$C\approx \text{“メビウスの帯”}$$

よって、$P^2(\mathbb{R})$ は開円板とメビウスの帯を境界で貼り合わせたものに同相である。■



例 7.14 (リーマン球面) $P^1(\mathbb{C})$ は球面 S^2 と同相である：$P^1(\mathbb{C}) \approx S^2$

証明　複素平面 $\mathbb{C}$ の 2 つのコピー $\mathbb{C}_z$ と $\mathbb{C}_w$ を用意し，写像 $\varphi : \mathbb{C}_z \to P^1(\mathbb{C})$ と $\psi : \mathbb{C}_w \to P^1(\mathbb{C})$ を

$$\varphi(z) = (z:1),\ \ \psi(w) = (1:w)$$

で定める。すると $P^1(\mathbb{C})$ はそれらの像で被覆される。

$$P^1(\mathbb{C}) = \varphi(\mathbb{C}_z) \cup \psi(\mathbb{C}_w)$$

$\varphi(z) = \psi(w)$ とすると，$(z:1) = (1:w)$ であるから，$z \neq 0, w \neq 0$ かつ $w = \dfrac{1}{z}$ である。すなわち，$P^1(\mathbb{C})$ は，複素平面 $\mathbb{C}$ の 2 つのコピー $\mathbb{C}_z$ と $\mathbb{C}_w$ を関係 $z \sim w \iff w = \dfrac{1}{z}$ で貼り合わせたものである。

$$P^1(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{C}_z \cup \mathbb{C}_w)/\!\sim$$

ここで，$\mathbb{C}_z$ と $\mathbb{R}^2$ を同一視して，$\mathbb{C}_z$ の点 $z = x + i\,y$ を $\mathbb{R}^2$ の点 (x, y) だと思い，例 **5.7** に従って，立体射影の逆写像 φ_+^{-1} を適用して，S^2 の点を対応

させる。

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{C}_z & \cong & \mathbb{R}^2 & \stackrel{\varphi_+^{-1}}{\to} & S^2 - \{(0,0,1)\} \\
x + i\,y & \mapsto & (x,y) & \mapsto & \dfrac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2+y^2-1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

この対応は $\mathbb{C}_z$ から $S^2 - \{(0,0,1)\}$ への同相写像である。これにより，$\mathbb{C}_z$ で覆われる $P^1(\mathbb{C})$ の部分から $S^2 - \{(0,0,1)\}$ への同相写像 f が得られた。$P^1(\mathbb{C})$ の点で $\mathbb{C}_z$ で覆われないのは，ただ 1 点 $(0:1)$ だけである。そこで，$f(0:1) = (0,0,1)$ として，$1:1$ 対応 $f : P^1(\mathbb{C}) \to S^2$ を定める。$f(1:0) = (0,0,-1)$ であるから，f は $\mathbb{C}_w$ から $S^2 - \{(0,0,-1)\}$ への $1:1$ 対応を与えている。どのような対応であるか調べよう。$\mathbb{C}_w - \{0\}$ 上では，$\varphi_- : S^2 - \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{R}^2$ を合わせて

$$
\mathbb{C}_w - \{0\} \cong \mathbb{C}_z - \{0\} \cong \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\} \stackrel{\varphi_+^{-1}}{\to} S^2 - \{(0,0,\pm 1)\} \stackrel{\varphi_-}{\to} \mathbb{R}^2 - \{\mathbf{0}\}
$$

を得る。これは同相写像である。計算する。

$$
\begin{aligned}
w = u + i\,v \mapsto z = \frac{1}{w} &= \frac{u - i\,v}{u^2+v^2} \\
&\mapsto \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2}\right) \\
&\stackrel{\varphi_+^{-1}}{\mapsto} \frac{(u^2+v^2)^2}{u^2+v^2+(u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} \frac{2u}{u^2+v^2} \\ \frac{-2v}{u^2+v^2} \\ \frac{u^2+v^2-(u^2+v^2)^2}{(u^2+v^2)^2} \end{pmatrix} \\
&\quad = \frac{1}{u^2+v^2+(u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} 2u(u^2+v^2) \\ -2v(u^2+v^2) \\ u^2+v^2-(u^2+v^2)^2 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{\varphi_-}{\mapsto} \frac{1}{2(u^2+v^2)}\left(2u(u^2+v^2), -2v(u^2+v^2)\right) \\
&\quad = (u, -v)
\end{aligned}
$$

最初と最後を見比べれば，この対応は $\mathbb{C}_w$ から $\mathbb{R}^2$ への同相写像に拡張する。したがって，f は $\mathbb{C}_w$ から $S^2 - \{(0,0,-1)\}$ への同相写像を与えている。■

例 7.15 射影 $p_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 - \{\mathbf{0}\} \to P^1(\mathbb{C})$ を，同一視 $\mathbb{C}^2 - \{\mathbf{0}\} \cong \mathbb{R}^4 - \{\mathbf{0}\}$ と前例により，$\mathbb{R}^4 - \{\mathbf{0}\}$ から S^2 への写像と思い，さらに，それを 3 次元単位球面 S^3 に制限したもの

$$
\mathrm{Hopf} : S^3 \subset \mathbb{R}^4 - \{\mathbf{0}\} \stackrel{p_{\mathbb{C}}}{\to} S^2
$$

をホップ写像という。計算すると，$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 = 1$ に対して

$$\mathrm{Hopf}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2(x_1x_3 - x_2x_4) \\ 2(x_1x_4 + x_2x_3) \\ x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2 - x_4{}^2 \end{pmatrix}$$

である。ホップ写像は S^3 から S^2 への連続写像として，定値写像とホモトピックでないことが知られている。

例 7.16 $P^3(\mathbb{R})$ は回転群 $SO(3)$ と同相である。

証明 $p : \mathbb{R}^4 - \{\mathbf{0}\} \to P^3(\mathbb{R})$ を単位球面 S^3 に制限すると，全射 $p|_{S^3} : S^3 \to P^3(\mathbb{R})$ が得られる。例 **7.10** と同様に，単射でなく $2:1$ 写像で，$p(x) = p(y) \iff y = \pm x$ である。$SO(3)$ に対しても，同様のことが成り立つことを確かめよう。

まず，S^3 は 2 次特殊ユニタリ群 $SU(2)$ と $1:1$ 対応することを見る。$SU(2)$ の元 $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ は，列ベクトルの正規性，直交性より

$$\begin{cases} \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} = 1 \\ \beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta} = 1 \\ \alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} = 0 \end{cases}$$

が成り立ち，行列式 $= 1$ より

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

が成り立つ。この式の $\bar{\delta}$ 倍と前 3 式の最後の式の β 倍を足すと

$$\alpha(\beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta}) = \bar{\delta}$$

となり，$\delta = \bar{\alpha}$ を得る。同様に $\beta = -\bar{\gamma}$ も得られる。したがって，$SU(2)$ の一般の元は

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\gamma} \\ \gamma & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \ \alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} = 1$$

と表される。そこで，$(x, y, u, v) \in S^3$ に対し，$\alpha = x + i\,y, \gamma = u + i\,v$ と対応させることができる。

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \overset{\approx}{\to} & SU(2) \\ (x, y, u, v) & \mapsto & \begin{pmatrix} x + i\,y & -u + i\,v \\ u + i\,v & x - i\,y \end{pmatrix} \end{array}$$

$SU(2)$ は行列として $\mathbb{C}^2$ に作用するが，それは，自然にリーマン球面 $P^1(\mathbb{C})$ 上の作用を導く。

$$(z : w) \overset{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}{\longmapsto} (\alpha z + \beta w : \gamma z + \delta w)$$

したがって，対応 $P^1(\mathbb{C}) \approx S^2$ により，S^2 に作用するが，この作用は S^2 の回転を与えることがわかる。

$$\begin{array}{ccc} P^1(\mathbb{C}) & \approx & S^2 \\ (x+i\,y:1) & \mapsto & \dfrac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2+y^2-1 \end{pmatrix} \end{array}$$

実際，$A(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\,\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\,\theta} \end{pmatrix}$ は xy 平面の回転角 2θ の回転 $R(2\theta)$ を与える。その作用は $P^1(\mathbb{C})$ 上では

$$\begin{aligned} (x+i\,y:1) &\overset{A(\theta)}{\longmapsto} (e^{i\,\theta}(x+i\,y):e^{-i\,\theta}) = (e^{2i\,\theta}(x+i\,y):1) \\ &= (x\cos 2\theta - y\sin 2\theta + i\,(x\sin 2\theta + y\cos 2\theta):1) \end{aligned}$$

となるが，S^2 での xy 平面の回転角 2θ の回転 $R(2\theta)$ と比べると

$$\frac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2+y^2-1 \end{pmatrix} \overset{R(2\theta)}{\longmapsto} \frac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} 2x\cos 2\theta - 2y\sin 2\theta \\ 2x\sin 2\theta + 2y\cos 2\theta \\ x^2+y^2-1 \end{pmatrix}$$

となり，対応する S^2 での変換と一致している。

また，$B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の $P^1(\mathbb{C})$ 上の作用を調べると

$$(x+i\,y:1) \overset{B}{\longmapsto} \left(\frac{x+i\,y-1}{x+i\,y+1}:1\right) = \left(\frac{x^2+y^2-1+i\,2y}{x^2+y^2+2x+1}:1\right)$$

となり，それを S^2 上に移すと，$x^2+y^2=r^2$ とおいて

$$\begin{aligned} \left(\frac{r^2-1+i\,2y}{r^2+2x+1}:1\right) &\overset{\approx}{\longmapsto} \frac{1}{\frac{(r^2-1)^2+4y^2+(r^2+2x+1)^2}{(r^2+2x+1)^2}}\begin{pmatrix} \frac{2r^2-2}{r^2+2x+1} \\ \frac{4y}{r^2+2x+1} \\ \frac{(r^2-1)^2+4y^2-(r^2+2x+1)^2}{(r^2+2x+1)^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\frac{2r^4+2+4r^2+4x(r^2+1)}{(r^2+2x+1)^2}}\begin{pmatrix} \frac{2r^2-2}{r^2+2x+1} \\ \frac{4y}{r^2+2x+1} \\ \frac{-8x^2-4x(r^2+1)}{(r^2+2x+1)^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2+1}\begin{pmatrix} r^2-1 \\ 2y \\ -2x \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ 2y \\ -2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが，これはもとの $\dfrac{1}{x^2+y^2+1}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2+y^2-1 \end{pmatrix}$ を，xz 平面の回転角 $\dfrac{\pi}{2}$ の回転で移したものである。すなわち，B の S^2 上の作用は，xz 平面の回

転角 $\dfrac{\pi}{2}$ の回転である。ここで，$A(\theta)$ と B をいくつか組み合わせて積を計算すると

$$BA(\theta)B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
$$A(\varphi)BA(\theta)B^{-1}A(\eta) = \begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\eta)}\cos\theta & e^{i(\varphi-\eta)}i\sin\theta \\ e^{-i(\varphi-\eta)}i\sin\theta & e^{-i(\varphi+\eta)}\cos\theta \end{pmatrix}$$

であるから，すべての $SU(2)$ の元が，これらの積で与えられることがわかる。また，S^2 上のすべての回転が与えられることもわかる。明らかに A と $-A$ は同じ回転を与え，また，A と同じ回転を与えるのは $-A$ だけであるので，$SO(3)$ は，群として $SU(2)/\{\pm 1\}$ と同型になり，それは $P^3(\mathbb{R})$ と同相である。■

問題

7.17 X を位相空間，$\sim$ を X 上の同値関係とする。$Y \subset X$ を部分空間とする。$\sim$ より導かれる Y 上の同値関係を $\sim_Y$ で表す。商空間 $Y/{\sim_Y}$ から $X/{\sim}$ への自然な単射 i は連続だが，部分空間への同相写像とは限らない。$X = [-1, 2]$ とし，同値関係 $\sim$ を $x \sim -x$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ とする。$-1 < t \leqq 1$ に対し，$Y = [-1, t) \cup (1, 2]$ とするとき，$i : Y/{\sim_Y} \to X/{\sim}$ は反例を与えることを示せ。

7.18 開集合（または閉集合）$B \subset X/{\sim}$ に対して，$Y = \pi^{-1}(B)$ とするとき，$i : Y/{\sim_Y} \to X/{\sim}$ は同相写像である。

7.19 標準射影 $\pi : X \to X/{\sim}$ は開写像（または閉写像）とする。部分集合 $B \subset X/{\sim}$ に対して，$Y = \pi^{-1}(B)$ とするとき，$i : Y/{\sim_Y} \to X/{\sim}$ は同相写像である。

7.20 位相空間 X の部分集合 A がレトラクトであるとは，連続写像 $r : X \to A$ で，$a \in A \Rightarrow r(a) = a$ を満たすものが存在するときとする。r の定める X 上の同値関係を $\sim_r$ とおく（$x \sim y \iff r(x) = r(y)$）。すると，$r$ は同相写像 $X/{\sim_r} \approx A$ を導く。

7.21 (i) $A \subset X$ を開集合（または閉集合）とする。そのとき，$X - A$ と $X/*_A - \pi(A)$ は同相である。

(ii) $A \subset X$ が閉でも開でもないとき，$X - A$ と $X/*_A - \pi(A)$ は同相とは限らない。$X = \mathbb{R}$ と $A = \mathbb{Q}$ は反例を与えることを示せ。

7.22 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ は連続，開かつ全射とする。すると，$\prod_\lambda f_\lambda : \prod_\lambda X_\lambda \to \prod_\lambda Y_\lambda$ は同相写像 $(\prod_\lambda X)\,/\!\sim_{\prod_\lambda f_\lambda} \approx \prod_\lambda Y_\lambda$ を導く。

7.23 $\sim_1, \sim_2$ を X 上の同値関係で，$x \sim_1 y \Rightarrow x \sim_2 y$ なるものとする。$\sim_2$ は $X/\!\sim_1$ 上の同値関係とも思える。そのとき，$(X/\sim_1)/\!\sim_2 \approx X/\!\sim_2$ である。

7.24 平面 $\mathbb{R}^2$ の下半平面を $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \mid y < 0\}$ と表す。$\mathbb{R}^2$ の 2 つのコピー $\mathbb{R}^2_1, \mathbb{R}^2_2$ の下半平面 $\mathbb{H}^2_1, \mathbb{H}^2_2$ の間の同相写像 $h : \mathbb{H}^2_1 \to \mathbb{H}^2_2$ を

$$h(x, y) = \left(x - \frac{1}{y}, y\right) \quad (y < 0)$$

で定めるとき，$\mathbb{R}^2_1 \cup_h \mathbb{R}^2_2$ は $\mathbb{R}^2$ と同相である。

7.25 前問において，同相写像 h を恒等写像 $\mathrm{id} : \mathbb{H}^2_1 \to \mathbb{H}^2_2$ に代えるとき，$\mathbb{R}^2_1 \cup_{\mathrm{id}} \mathbb{R}^2_2$ は $\mathbb{R}^2$ と同相でない。

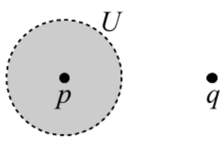
7.26 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\!*_{\mathbb{Z}}$ を標準射影とし，$\pi \times 1 : \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}/ *_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Q}$ の定める $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ 上の同値関係を $\sim_{\pi\times 1}$ と表すとき，$\pi \times 1$ の導く全単射 $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}/\!\sim_{\pi\times 1} \to \mathbb{R}/ *_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Q}$ は同相写像でない。

8　分離公理

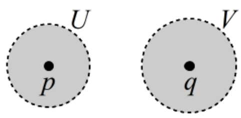
交わらない 2 つの開集合は，それぞれの点が離れていると考えられる。位相空間の中に離れた点がどのくらい自由に選べるかを，位相空間の扱いやすさを表す 1 つの尺度としてとらえて，次のような分離公理が考えられた。

定義　位相空間 X に対し，次の**分離公理**を考える。

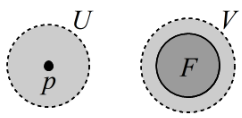
(i) X が T_1 **空間**であるとは，任意の相異なる 2 点 $p, q \in X$ に対し，$p \in U, q \notin U$ となる開集合 $U \subset X$ があるときである。



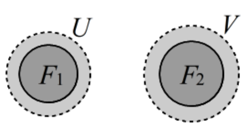
(ii) X が**ハウスドルフ（Hausdorff）空間**であるとは，任意の相異なる 2 点 $p, q \in X$ に対し，$p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset$ となる開集合 $U, V \subset X$ があるときである。



(iii) X が**正則空間**であるとは，X は T_1 空間で，任意の点 $p \in X$ と p を含まない閉集合 $F \subset X$ に対し，$p \in U, F \subset V, U \cap V = \emptyset$ となる開集合 $U, V \subset X$ があるときである。



(iv) X が**正規空間**であるとは，X は T_1 空間で，交わらない 2 つの閉集合 $F_1, F_2 \subset X$ に対し，$F_1 \subset U, F_2 \subset V, U \cap V = \emptyset$ となる開集合 $U, V \subset X$ があるときである。



定理 39 次の論理関係が成り立つ。

$$\text{距離空間} \Rightarrow \text{正規空間} \Rightarrow \text{正則空間} \Rightarrow \text{ハウスドルフ空間} \Rightarrow T_1 \text{ 空間}$$

証明は，順次行う。

8.1 T_1 空間

注意 “X は T_1” $\Longleftrightarrow$ “$\forall p \in X$;1 点集合 $\{p\} \subset X$ は閉集合”

証明 T_1 空間の条件は $X - \{p\}$ が開集合であることと同値である。すなわち，$q \in X - \{p\}$ とすると，q の開近傍 U で $U \subset X - \{p\}$ を満たすものがある。■

注意 “X は T_1” $\Longleftrightarrow$ “$\forall p \in X; \displaystyle\bigcap_{N \in \mathcal{N}(p)} N = \{p\}$”

証明 “$\Rightarrow$” X は T_1 とする。$p \neq q$ とすると，p の開近傍 U で q を含まないものがある。したがって，$q \notin \bigcap_{N \in \mathcal{N}(p)} N$ である。すべての $q \neq p$ について，$q \notin \bigcap_{N \in \mathcal{N}(p)} N$ であるであるから，$\bigcap_{N \in \mathcal{N}(p)} N = \{p\}$ である。

“$\Leftarrow$”右辺を仮定する。$p \neq q$ とすると，$q \notin \bigcap_{N \in \mathcal{N}(p)} N$ である。したがって，p の近傍 N で $q \notin N$ となるものがある。そのとき，p を含む開集合 U で，N に含まれるものがある。そのとき，$q \notin U$ である。■

例題 T_1 空間 X において，導集合 A^d は閉集合である。

証明 $p \in \overline{A^d}$ として，$p \in A^d$ を示す。$p \notin A^d$ として矛盾を導く。$p \in U$ となる開集合 U で，$U \cap (A - \{p\}) = \emptyset$ となるものがある。U は p の近傍であるから，A^d と交わる。$q \in U \cap A^d$ とする。$q \neq p$ である。したがって，$U - \{p\}$ は q の近傍である。$q \in A^d$ より，$(U - \{p\}) \cap (A - \{q\}) \neq \emptyset$ となる。これは，$U \cap (A - \{p\}) = \emptyset$ と矛盾する。■

例 8.1 集合 X が 2 点以上の点を含むとき，X 上の密着位相は T_1 でない。

8.2 ハウスドルフ空間

注意 “X はハウスドルフ” $\Longleftrightarrow$ “$\forall p \in X; \displaystyle\bigcap_{N \in \mathcal{N}(p)} \overline{N} = \{p\}$”

証明 “$\Rightarrow$”X はハウスドルフとする。$p \neq q$ とすると，ハウスドルフの条件を満たす開近傍 U, V が存在する。このとき，$p \in U \subset X - V$ であるから，$N = X - V$ は p の近傍で，閉集合で，したがって，$q \notin N = \overline{N}$ となり，$q \notin \overline{N}$ であるから，$q \notin \bigcap_{N \in \mathcal{N}(p)} \overline{N}$ である。すべての $q \neq p$ について，$q \notin \bigcap_{N \in \mathcal{N}(p)} \overline{N}$ であるであるから，$\bigcap_{N \in \mathcal{N}(p)} \overline{N} = \{p\}$ である。

“$\Leftarrow$” 右辺を仮定する。$p \neq q$ とすると，$q \notin \bigcap_{N \in \mathcal{N}(p)} \overline{N}$ である。したがって，p の近傍 N で $q \notin \overline{N}$ となるものがある。そのとき，p を含む開集合 U で，N に含まれるものがある。また，$V = X - \overline{N}$ とおくと，$q \in V$ で $U \cap V = \emptyset$ である。■

系　ハウスドルフならば T_1 である。■

例題　“X はハウスドルフ” $\Longleftrightarrow$ “ 対角線集合 $\Delta = \{(p,p) \mid p \in X\}$ は積空間 $X \times X$ の閉集合”

証明　“$\Rightarrow$” $p \neq q$ とすると，$p \in U, q \in V, U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V がある。このとき $U \times V \cap \Delta = \emptyset$ である。これは $X \times X$ において，$X \times X - \Delta$ が開集合であることを示している。

“$\Leftarrow$” 上の議論を逆にたどればよい。■

例題　位相空間 X の部分集合 A が**レトラクト**であるとは，連続写像 $r : X \to A$ で，“$p \in A \Rightarrow r(p) = p$” を満たすものが存在するときとする。ハウスドルフ空間 X のレトラクト A は閉集合である。

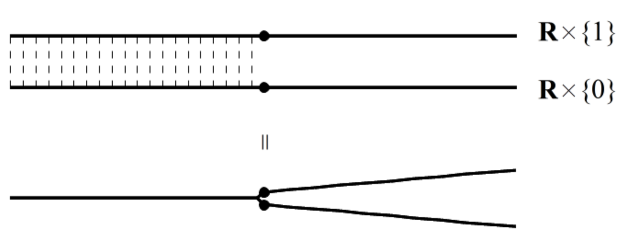
証明　$X - A$ が開集合であることを示す。$p \notin A$ とすると，$r(p) \in A$ であるから，$p \neq r(p)$ である。したがって，$p \in U, r(p) \in V, U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する。r の連続性より，p の開近傍 U' で $r(U') \subset V$ となるものがある。すると，$U \cap U'$ は p の近傍で $X - A$ に含まれる。実際，$q \in (U \cap U') \cap A$ とすると，$r(q) = q$ で，$q \in U \cap U', r(q) \in V$ となり，矛盾が導かれる。■

例 8.2 無限集合 X において，$\mathcal{O}$ を，$\emptyset$ および有限集合の補集合の全体とすると，位相を定める。この位相は T_1 であるが，ハウスドルフでない。

例 8.3 数直線 2 つのコピー $\widetilde{X} = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ において，同値関係 $\sim$ を

$$(t,0) \sim (t,1) \quad (t < 0)$$

とおくと，商空間 $X = \widetilde{X}/\sim$ は T_1 であるが，ハウスドルフでない。



8.3 正則空間

注意 正則ならばハウスドルフである。■

定理 40 T_1 空間 X において，次の 4 条件は同値である。

(a) X は正則である。

(b) 任意の $p \in X$ と $N \in \mathcal{N}(p)$ に対して，p の開近傍 V で $\overline{V} \subset N$ を満たすものが存在する。（閉近傍の全体は基本近傍系をなす。）

(c) 任意の $p \in X$ と p を含まない閉集合 $F \subset X$ に対し，$p \in U, F \subset V, \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ となる開集合 $U, V \subset X$ が存在する。

(d) X の任意の閉集合 F に対して，次が成り立つ。

$$F = \bigcap_{F \subset U,\, U \subset X \text{ 開}} \overline{U}$$

証明 "(a) ⇒ (b)" N は p の近傍であるから，$p \in U \subset N$ となる開集合 U が存在する。$F = X - U$ とすると，$p \in V, F \subset W, V \cap W = \emptyset$ となる開集合 V, W が存在する。このとき，$V \subset X - W$ より，$\overline{V} \subset X - W$ となる。すなわち，$\overline{V} \cap W = \emptyset$ である。よって，$\overline{V} \cap F = \emptyset$ となる。すなわち，$\overline{V} \subset U \subset N$ である。

"(b) ⇒ (c)" $X - F$ は p の近傍である。よって，仮定より，$p \in W \subset \overline{W} \subset X - F$ となる開集合 W が存在する。さらに，近傍 W に対して，$p \in U \subset \overline{U} \subset W$ となる開集合 U が存在する。このとき，$V = X - \overline{W}$ とおけば，$\overline{V} \subset X - W$ が成り立つ。すなわち，$\overline{V} \cap W = \emptyset$ で，$\overline{V} \cap \overline{U} = \emptyset$ も成り立つ。一方，$X - V = \overline{W} \subset X - F$ より，$F \subset V$ である。

"(c) ⇒ (d)" $F \subset U \subset \overline{U}$ より，"$\subset$" は明らか。"$\supset$" を示す。$p \notin F$ として，$p \notin$ "右辺" を見ればよい。$p \in U, F \subset V, \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ となる開集合 $U, V \subset X$ がある。このとき，$p \notin \overline{V}$ である。

"(d) ⇒ (a)" $p \notin F$ とすると，$p \notin$ "右辺" である。したがって，ある開集合 U に対し，$F \subset U, p \notin \overline{U}$ となる。$p \notin \overline{U}$ より，p を含む開集合 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものがある。■

定理 41 正則空間の積空間は正則である。

証明 X, Y を正則とし，$X \times Y$ が正則をみる。点 $(p, q) \in X \times Y$ とその近傍 N に対し，開集合 $U \subset X, V \subset Y$ で $p \in U, q \in V, U \times V \subset N$ となるものがある。X, Y は正則であるから，開集合 $U_0 \subset X, V_0 \subset Y$ で $p \in U_0, \overline{U_0} \subset U, q \in V_0, \overline{V_0} \subset V$ となるものがある。そのとき，$\overline{U_0} \times \overline{V_0}$ は閉で $(p, q) \in U_0 \times V_0 \subset \overline{U_0} \times \overline{V_0} \subset U \times V \subset N$ が成り立つ。前定理 (b) より，$X \times Y$ は正則である。■

例 8.4 数直線 $\mathbb{R}$ において，0 の基本近傍系だけを変えて

$$\mathcal{N}'(0) = \left\{ (-\varepsilon, \varepsilon) - \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, \ldots \right\} \,\middle|\, \varepsilon > 0 \right\}$$

と置きかえて得られた位相を $\mathcal{O}'$ とおくと，$X = (\mathbb{R}, \mathcal{O}')$ はハウスドルフであるが，正則でない。実際，$\left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, \ldots \right\}$ は閉集合であるが，0 と，交わらない開集合で分離できない。

8.4 正規空間

注意 正規ならば正則。 ■

定理 42 距離空間は正規。

証明 (X, d) を距離空間とし，F_1, F_2 を交わらない閉集合とする。F_1 の各点 p に対し，ε_p を選んで，$N(p, \varepsilon_p) \cap F_2 = \emptyset$ とする。$U = \bigcup_{p \in F_1} N\left(p, \frac{\varepsilon_p}{2}\right)$ とする。同様に，F_2 の各点 q に対し，δ_q を選んで，$N(q, \delta_q) \cap F_1 = \emptyset$ とし，$V = \bigcup_{q \in F_2} N\left(q, \frac{\delta_q}{2}\right)$ とする。U, V は開集合で，$F_1 \subset U, F_2 \subset V$ である。$U \cap V = \emptyset$ を見ればよい。実際，$U \cap V \neq \emptyset$ とすると，ある $p \in F_1, q \in F_2$ に対して，$N\left(p, \frac{\varepsilon_p}{2}\right) \cap N\left(q, \frac{\delta_q}{2}\right) \neq \emptyset$ したがって，$d(p, q) < \frac{\varepsilon_p}{2} + \frac{\delta_q}{2}$ 特に，$d(p, q) < \varepsilon_p$ または $d(p, q) < \delta_q$ となり，いずれにしても矛盾である。 ■

以下，後述のウリゾーンの補題の証明の準備が続く。

主張 1 X を正規空間とし，$F \subset X$ を閉集合，$U \subset X$ を開集合で，$F \subset U$ なるものとする。そのとき，開集合 $V \subset X$ で，$F \subset V$, $\overline{V} \subset U$ なるものが存在する。

証明 $F_1 = F, F_2 = X - U$ とおけば，F_1, F_2 は交わらない閉集合。したがって，開集合 $V, W \subset X$ で，$F_1 \subset V, F_2 \subset W, V \cap W = \emptyset$ なるものがある。そのとき，$F \subset V \subset \overline{V} \subset X - W \subset X - F_2 = U$ である。■

定義 分母が 2^n で表される有理数を 2 **進分数**という。

主張 2 X を正規空間とし，$F_0 \subset X$ を閉集合，$U_1 \subset X$ を開集合で，$F_0 \subset U_1$ なるものとする。そのとき，$0 < q < 1$ なる，すべての 2 進分数 q に対し，開集合 $U_q \subset X$ を定めて，$F_0 \subset U_q$, $\overline{U_q} \subset U_1$ で

$$q < q' \;\Rightarrow\; \overline{U_q} \subset U_{q'}$$

を満たすようにできる。

証明　2 進分数 q は既約形で $\dfrac{d}{2^n}$ と表される。分母の指数 n に関して，帰納的に $U_q \subset X$ を定める。分母の指数が n より小さい 2 進分数 q'（有限個）に対して $U_{q'}$ が定まっているとする。$q = \dfrac{d}{2^n}$ に対して，$d \pm 1$ は偶数。したがって，$U_{\frac{d-1}{2^n}}, U_{\frac{d+1}{2^n}}$ はすでに定まっていて

$$\overline{U_{\frac{d-1}{2^n}}} \subset U_{\frac{d+1}{2^n}}$$

である。これらに対して，主張 1 を適用して，U_q を選べばよい。■

主張 3　主張 2 の状況で $f : X \to \mathbb{R}$ を

$$f(p) = \begin{cases} 1, & p \text{ はどの } U_q \text{ にも属さないとき} \\ \inf\{q \mid q \text{ は 2 進分数で } p \in U_q\} \end{cases}$$

とおく。すると，f は $[0,1]$ への連続関数で，$f(F_0) = \{0\}, f(X - U_1) = \{1\}$

証明　f の構成より

$$p \in U_q \ \Rightarrow\ f(p) \leqq q \quad \text{かつ} \quad f(p) < q \ \Rightarrow\ p \in U_q$$

である。したがって，$q < q'$ に対して

$$p \in U_{q'} - U_q \ \Rightarrow\ q \leqq f(p) \leqq q'$$

$f(p) = 0$ ならば，任意の $q > 0$ に対して，$p \in U_q$
$\varepsilon > 0$ に対して，十分小さな $q > 0$ をとれば，$q < \varepsilon$ で

$$p' \in U_q \ \Rightarrow\ f(p') \leqq q < \varepsilon$$

$f(p) = 1$ ならば，任意の $q < q' < 1$ に対して，$p \notin U_{q'}$　とくに $p \notin \overline{U_q}$
$\varepsilon > 0$ に対して，1 に十分近い $q < q' < 1$ をとれば，$1 - \varepsilon < q < q'$ で

$$p' \in X - \overline{U_{q'}} \ \Rightarrow\ p' \notin U_q \ \Rightarrow\ f(p') \geqq q > 1 - \varepsilon$$

$0 < f(p) < 1$ ならば，任意の $0 < q'' < q < f(p) < q' < 1$ に対して，$p \in U_{q'} - \overline{U_{q''}}$
$\varepsilon > 0$ に対して，$f(p) - \varepsilon < q < f(p) < q' < f(p) + \varepsilon$ なる q, q' をとれば

$$p' \in U_{q'} - \overline{U_q} \ \Rightarrow\ f(p) - \varepsilon < q \leqq f(p') \leqq q' < f(p) + \varepsilon$$

これらは f の連続性を示している。■

以上より，次が示された。$F_0 = A,\ U_1 = X - B$ とおけばよい。

定理 43 (ウリゾーン (Uryson) の補題)　X を正規空間，$A, B \subset X$ をたがいに交わらない閉集合とすると，連続関数 $f : X \to [0,1]$ で $f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\}$ となるものが存在する。

定理 44 (ティーツェ(Tietze) の拡張定理) X を正規空間，$A \subset X$ を閉集合とすると，A 上の連続関数 $f : A \to \mathbb{R}$ を X 全体の連続関数 $F : X \to \mathbb{R}$ に拡張することができる。

証明 “$f(A) \subset [-1, 1]$ の場合” 値域 $[-1, 1]$ を 3 等分して

$$A_0 = \left\{ p \in A \,\middle|\, f(p) \leqq -\frac{1}{3} \right\},\ B_0 = \left\{ p \in A \,\middle|\, f(p) \geqq \frac{1}{3} \right\}$$

とおくと A_0, B_0 はたがいに交わらない A の閉集合，したがって，X の閉集合でもある。そこで，ウリゾーンの補題を利用して，連続関数 $F_0 : X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ で $F_0(A_0) = \left\{-\frac{1}{3}\right\}, F_0(B_0) = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ となるものを選ぶことができる。そのとき，A 上で $|f(p) - F_0(p)| \leqq \frac{2}{3}$ である。

ふたたび，値域 $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$ を 3 等分して

$$A_1 = \left\{ p \in A \,\middle|\, f(p) - F_0(p) \leqq -\frac{2}{9} \right\},\ B_1 = \left\{ p \in A \,\middle|\, f(p) - F_0(p) \geqq \frac{2}{9} \right\}$$

とおくと A_1, B_1 はたがいに交わらない X の閉集合。そこで，ウリゾーンの補題を利用して，連続関数 $F_1 : X \to \left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right]$ で $F_1(A_1) = \left\{-\frac{2}{9}\right\}, F_1(B_1) = \left\{\frac{2}{9}\right\}$ となるものを選ぶことができる。そのとき，A 上で $|f(p) - F_0(p) - F_1(p)| \leqq \frac{4}{9}$ である。

以下同様に，帰納的に連続関数 $F_{n+1} : X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$ を構成する。すなわち，$f - F_0 - F_1 - \cdots - F_n$ の値域 $\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$ を 3 等分して，ウリゾーンの補題を利用して

$$\begin{cases} \text{値が} \leqq -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \text{ のところでは } -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\ \text{値が} \geqq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \text{ のところでは } \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \\ \text{中間のところではその中間としたもの} \end{cases}$$

を F_{n+1} とすることができる。

A 上で $|f(p) - F_0(p) - \cdots - F_{n+1}(p)| \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ である。

有限和 $\sum_{k=0}^{n} F_k$ は連続関数 $F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n$ に一様収束し，A 上では f に一様収束する。したがって F は求めるものである。

“$f(A) \subset [-1, 1]$ でない場合” $g(p) = \frac{2}{\pi} \arctan f(p)$ とおき，前半を適用して，$g : A \to (-1, 1)$ の拡張 $G : X \to [-1, 1]$ を得る。ここで $B = G^{-1}(\pm 1)$

とおけば，A, B は X の交わらない閉集合で，ウリゾーンの補題より A で 1，B で 0 の連続関数 $h : X \to [0,1]$ を得る。そこで，$F(p) = \tan\dfrac{\pi}{2}h(p)\,G(p)$ とおけばよい。 ■

位相空間 X に対し，その位相を与える距離関数があるとき，**距離化可能**であるという。

定理 45 (ウリゾーンの距離化可能定理) 第 2 可算公理を満たす正則空間は距離化可能である。

補題 第 2 可算公理を満たす正則空間は正規である。

証明 X を第 2 可算公理を満たす正則空間とする。$\mathcal{B} = \{B_n\}$ をその可算基とする。F_1, F_2 を交わらない閉集合とする。正則性より，F_1 の各点 p はその閉包が F_2 と交わらない近傍をもつから，$p \in B_n, \overline{B_n} \cap F_2 = \emptyset$ となる $B_n \in \mathcal{B}$ がある。$\mathcal{B}$ の中からそのようなものをすべて選びだし，改めて $\{U_n\}$ とする。$F_1 \subset \bigcup_n U_n$ である。F_1, F_2 の役割を換えて，$\{V_n\}$ を選ぶ。$F_2 \subset \bigcup_n V_n$ である。ここで

$$U_n' = U_n - (\overline{V_1} \cup \cdots \cup \overline{V_n}),\ V_n' = V_n - (\overline{U_1} \cup \cdots \cup \overline{U_n}),$$
$$U = \bigcup_n U_n',\ V = \bigcup_n V_n'$$

とおけば，$F_1 \subset U,\ F_2 \subset V,\ U \cap V = \emptyset$ である。 ■

定理の証明 $\mathcal{B}$ の元の対 (B_n, B_m) で $\overline{B_n} \subset B_m$ を満たすもの全体は可算個である。それを改めて $\{(C_n, D_n)\}$ とおく。ウリゾーンの補題より，各 n に対し，連続関数 $f_n : X \to [0,1]$ で，$\overline{C_n}$ 上で 0，$X - D_n$ 上で 1 となるものを選ぶ。ここで，$d : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d(p,q) = \sum_n \frac{1}{2^n}|f_n(p) - f_n(q)|$$

と定める。級数は一様収束し，$X \times X$ 上の連続関数になる。d は X 上の距離関数である。実際，$p \neq q$ のとき，$d(p,q) > 0$ を見れば十分である。そのとき，p の任意の近傍 N_1 に対し，近傍 N_2 で $\overline{N_2} \subset N_1$ となるものがあるから，$p \in C_n,\ q \notin D_n$ となる n がある。

X の位相 $\mathcal{O}$ と距離位相 $\mathcal{O}_d$ を比べよう。固定した p に対して，q の関数 $d(p,q)$ は X 上の連続関数。したがって，ε 近傍は開集合。よって，$\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}$

逆に，$W \in \mathcal{O}, p \in W$ とすると，$p \in C_n, D_n \subset W$ となる n がある。p の $\dfrac{1}{2^n}$ 近傍 $N\left(p, \dfrac{1}{2^n}\right)$ を考える。$q \in N\left(p, \dfrac{1}{2^n}\right)$ とすると，$d(p,q) < \dfrac{1}{2^n}$ $f_n(p) = 0$ より $f_n(q) < 1$ したがって，$q \in D_n \subset W$ よって，W は距離位相で開である。すなわち，$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_d$ ■

例 8.5 (ソルゲンフレイ直線) (i) $\mathbb{R}_{Sor}$ は正規。

(ii) 積空間 $\mathbb{R}_{Sor} \times \mathbb{R}_{Sor}$ は正規でない。

したがって，正規空間の積空間は正規とは限らないし，$\mathbb{R}_{Sor} \times \mathbb{R}_{Sor}$ は正規でない正則空間である。また，$\mathbb{R}_{Sor}$ は距離化可能でないから，第 2 可算でもない。

証明 “(i)” $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}_{Sor}$ をたがいに交わらない閉集合とする。F_1 の各点 t に対して，$\varepsilon_t > 0$ で $[t, \varepsilon_t) \cap F_2 = \emptyset$ なるものを選ぶ。$U = \bigcup_{t \in F_1} [t, \varepsilon_t)$ とおくと，$F_1 \subset U$ で U は開集合。$1, 2$ を換えて，同様に，各 $s \in F_2$ に対し，$[s, \delta_s) \cap F_1 = \emptyset$ を選び，開集合 $V = \bigcup_{s \in F_2} [s, \delta_s)$ を得る。このとき，選び方より，$t \in F_1, s \in F_2$ に対し，$[t, \varepsilon_t) \cap [s, \delta_s) = \emptyset$ であるから，$U \cap V = \emptyset$

“(ii)” $F = \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}_{Sor} \times \mathbb{R}_{Sor}$ とおくと，閉集合である。ところが $\{(t, -t)\} = F \cap [t, t+\varepsilon) \times [-t, -t+\varepsilon)$ であるから，1 点 $\{(t, -t)\} \subset F$ は開集合。すなわち，部分空間 $F \subset \mathbb{R}_{Sor} \times \mathbb{R}_{Sor}$ は離散空間である。したがって，任意の部分集合は閉集合である。全単射 $\Delta' : \mathbb{R} \to F$ を $\Delta'(t) = (t, -t)$ とおいて，数直線 $\mathbb{R}$ と F を対応させる。$F_1 = \Delta'(\mathbb{Q}), F_2 = \Delta'(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ とおく。$\mathbb{R}_{Sor} \times \mathbb{R}_{Sor}$ の開集合 U, V で，$F_1 \subset U, F_2 \subset V$ なるものとする。$U \cap V \neq \emptyset$ を示したい。各 $t \in \mathbb{R}$ に対し，$\varepsilon_t > 0$ を

$$\begin{cases} t \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow \ [t, t+\varepsilon_t) \times [-t, -t+\varepsilon_t) \subset U \\ t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \ \Rightarrow \ [t, t+\varepsilon_t) \times [-t, -t+\varepsilon_t) \subset V \end{cases}$$

となるように選ぶ。ベールのカテゴリー定理によると，$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ は第 2 類集合で，$S_n = \left\{ t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \,\middle|\, \varepsilon_t > \dfrac{1}{n} \right\}$ とおくと，$\bigcup_n S_n = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ であるから，S_n の中に疎でないものがある。したがって，$(\alpha, \beta) \subset \overline{S_n}$ となる n がある。そのとき，開区間 (α, β) の中に，稠密に $\varepsilon_t > \dfrac{1}{n}$ となる無理数 t が含まれる。一方，(α, β) は有理数 q も含み，$[q, q+\varepsilon_q) \times [-q, q+\varepsilon_q) \subset U$ である。このとき，q に十分近い $t \in S_n$ にたいして，$[q, q+\varepsilon_q) \times [-q, q+\varepsilon_q) \cap [t, t+\varepsilon_t) \times [-t, -t+\varepsilon_t) \neq \emptyset$ である。よって，$U \cap V \neq \emptyset$ ■

問題

8.6 有限集合上の位相で，T_1 を満たすものは離散位相だけである。

8.7 位相空間 X に対して，T_1 の条件は次の (a) または (b) と同値である。

(a) $$\bigcap_{p \in U,\ U \subset X;\ 開} U = \{p\}$$

(b) $$\bigcap_{p \in F,\ F \subset X;\ 閉} F = \{p\}$$

8.8 T_1 空間 X において，$(A^d)^d \subset A^d$

8.9 T_1 空間 X において，$\left(\overline{A}\right)^d = A^d$

8.10 商空間 $X/\sim$ がハウスドルフである必要十分条件は，各同値類 $[x] \subset X$ が閉集合であることである。

8.11 ハウスドルフ空間の n 点 $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ に対して，その近傍 $N(x_1)$, $N(x_2), \ldots, N(x_n)$ で，互いに交わらないものがある。

8.12 $f : X \to Y,\ b : Y \to X$ は連続で，$g \circ f = 1_X$ とする。Y がハウスドルフならば，X もハウスドルフで，像 $f(X)$ は Y の閉集合である。

8.13 前章問題 **7.25** の空間は T_1 であるがハウスドルフでない。

8.14 X はハウスドルフ，$D \subset X$ は稠密，$f : X \to Y$ は連続とする。制限 $f|D : D \to Y$ が部分空間への同相写像のとき，$f(X - D) \subset Y - f(D)$ である。

8.15 X, Y はハウスドルフ，$D \subset X, E \subset Y$ は稠密，同相写像 $h : D \to E$ があり，連続写像 $f : X \to Y$ に拡張し，さらに，$h^{-1} : E \to D$ は連続写像 $g : Y \to X$ に拡張するものとする。そのとき，f, g は同相写像で，$g = f^{-1}$ である。

8.16 X をハウスドルフ空間とすると，その錐 $\mathrm{Cone}(X)$ もハウスドルフである。

8.17 X はハウスドルフ，$f : X \to X$ は連続とすると，$\{x \mid f(x) = x\} \subset X$ は閉集合である。

8.18 無限ハウスドルフ空間は可算無限離散部分空間を含む。

8.19 X をハウスドルフ空間とすると，その錐 $\mathrm{Cone}(X)$ もハウスドルフである。

8.20 X をハウスドルフとし，各点 x は $\overline{V}$ が正則であるような近傍 V をもつとすると，X は正則である。

8.21 X が正則ならば，任意の 2 点は，閉包が交わらないような近傍をもつ。

8.22 $X = \mathbb{R}$ とし，各点 x と $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$U_n(x) = \{x\} \cup \left\{ y \in \mathbb{Q} \;\middle|\; |x - y| < \frac{1}{n} \right\}$$

とおくと，$\{U_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ を x の基本近傍系とする X の位相が定まる。そのとき，X の任意の 2 点は，閉包が交わらないような近傍をもつが，正則でない。

8.23 X を正則とし，$A \subset X$ を閉集合とすると，次が成り立つ。

$$A = \bigcap \{U \subset X \mid U \text{ は } A \text{ を含む開集合 }\}$$

8.24 (R. H. Bing) 無理数 $\theta > 0$ を 1 つ選ぶ。

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid y \geqq 0\}$$

とし，$(x, y) \in X$ と $\varepsilon > 0$ に対し

$$B_\varepsilon(x, y) = \{(x, y)\} \cup \{(z, 0) \mid |z - (x + \theta y)| < \varepsilon \text{ または } |z - (x - \theta y)| < \varepsilon\}$$

とおく。

(i) $\{B_\varepsilon(x, y) \mid \varepsilon > 0\}$ を (x, y) の基本近傍系とする X の位相が定まる。

(ii) X はハウスドルフである。

(iii) $\overline{B_{\varepsilon_1}(x_1, y_1)} \cap \overline{B_{\varepsilon_2}(x_2, y_2)} \neq \emptyset$（したがって，$X$ は正則でない）。

8.25 (M. Brown) $X = \mathbb{N}$ とする。たがいに素な自然数 a, b に対し

$$U(a, b) = \{an + b \in \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

とおく。

(i) $\{U(a, b)\}$ を開基とする X の位相が定まる。

(ii) p を素数とすると，$\{kp \mid k \in \mathbb{N}\}$ は閉集合である。

(iii) 素数全体の集合 P は内点を含まない。

(iv) X はハウスドルフである。

(v) ある k に対し，$ka \in U(c, d)$ とすると，$U(a, b) \cap U(c, d) \neq \emptyset$ である。

(vi) X は正則でない（1 と $2\mathbb{N}$ は分離できない）。

8.26 X を正規とし，$\sim$ をその上の同値関係とする。標準射影 $\pi : X \to X/\sim$ は開写像かつ閉写像とすると，$X/\sim$ も正規である。

8.27 X を，境界を含む上半平面 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqq\}0$ とし，その上の位相を，$y > 0$ の部分では通常の位相と定め，境界点 $(x, 0)$ の近傍を

$$\{(x, 0)\} \cup \text{“}(x, 0) \text{ で } x \text{ 軸に接する円の内部”}$$

とするものとする。そのとき，X は正規でない。

8.28 X を閉区間 $I = [0, 1]$ とし，その上の位相 $\mathcal{O}_1$ を，通常位相 $\mathcal{O}$ に無理数のべき集合 $\mathcal{P}(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ を合わせたものを準基とするものとする。

$$\mathcal{O}_1 = \text{“}\mathcal{O} \cup \mathcal{P}(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \text{ を準基とする位相”}$$

そのとき，X は正規である。

9 コンパクト空間

定義 (コンパクト空間) 位相空間 X が**コンパクト**であるとは，任意の開被覆に対して，有限部分被覆が存在するとき。一般に，位相空間 X の部分集合 A がコンパクトとは，部分空間としてコンパクトであるとき。

例 9.1 (ハイネーボレル) 閉区間 $[a,b]$ はコンパクトである。

例 9.2 $\mathbb{R}$ の開被覆 $\{(-n,n) \mid n=1,2,3,\ldots\}$ は有限部分被覆をもたない。したがって，$\mathbb{R}$ はコンパクトでない。

例 9.3 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A について

$$A \text{ はコンパクト} \iff A \text{ は有界閉集合}$$

定義 集合 X の部分集合の族 $\mathcal{A}=\{A_\lambda\}$ が**有限交差**であるとは，任意の有限部分族が交わるとき。$A_{\lambda_1}\cap A_{\lambda_2}\cap\cdots\cap A_{\lambda_N}\neq\emptyset$

定理 46 X がコンパクトであるための必要十分条件は，任意の有限交差閉集合族の共通部分は $\emptyset$ でないことである。

証明 "$\Rightarrow$" X をコンパクトとし，$\mathcal{F}=\{F_\lambda\}$ をその有限交差閉集合族とする。$\bigcap F_\lambda=\emptyset$ とすると，開集合の族 $\mathcal{U}=\{X-F_\lambda\}$ は X を覆っている。コンパクト性より，有限部分被覆がある。$X=(X-F_{\lambda_1})\cup(X-F_{\lambda_2})\cup\cdots\cup(X-F_{\lambda_N})=X-(F_{\lambda_1}\cap F_{\lambda_2}\cap\cdots\cap F_{\lambda_N})$ これは，$F_{\lambda_1}\cap F_{\lambda_2}\cap\cdots\cap F_{\lambda_N}\neq\emptyset$ に矛盾。

"$\Leftarrow$" X をコンパクトでないとすると，有限部分被覆をもたない開被覆 $\mathcal{U}=\{U_\lambda\}$ が存在する。そのとき，$F_\lambda=X-U_\lambda$ とおくと，$\mathcal{F}=\{F_\lambda\}$ は有限交差閉集合族。実際，$F_{\lambda_1}\cap F_{\lambda_2}\cap\cdots\cap F_{\lambda_N}=X-(U_{\lambda_1}\cup U_{\lambda_2}\cup\cdots\cup U_{\lambda_N})\neq\emptyset$ したがって，$\mathcal{F}$ は共通部分をもつが，これは $\mathcal{U}$ が X の被覆であることに矛盾。
■

例 9.4 Cantor 集合はコンパクトである。アントワーヌのネックレスもコンパクトである。

定理 47 コンパクト空間の閉集合はコンパクトである。

証明 X をコンパクト空間，F をその閉集合とする。X の開集合の族 $\mathcal{U}=\{U_\lambda\}$ が F を覆っているとする。すなわち，$F\subset\bigcup U_\lambda$ ここで，$U_0=X-F$ とおくと，X の開集合で，$\mathcal{U}_0=\mathcal{U}\cup\{U_0\}$ は X の開被覆。X のコンパクト性より，有限部分被覆 $X=U_0\cup U_{\lambda_1}\cup U_{\lambda_2}\cup\cdots\cup U_{\lambda_N}$ が存在する。このとき，$F\subset U_{\lambda_1}\cup U_{\lambda_2}\cup\cdots\cup U_{\lambda_N}$ ■

定理 48 X をコンパクト空間，Y を位相空間，$f:X\to Y$ を連続写像とするとき，像 $f(X)$ は Y のコンパクト集合である。

証明 Y の開集合の族 $\mathcal{U}=\{U_\lambda\}$ が $f(X)$ を覆っているとする。すなわち，$f(X)\subset\bigcup U_\lambda$ このとき，f の連続性より，$f^{-1}(U_\lambda)$ は X の開集合で，$f^{-1}(\mathcal{U})=\{f^{-1}(U_\lambda)\}$ は X の開被覆。X のコンパクト性より，有限部分被覆 $X=f^{-1}(U_{\lambda_1})\cup f^{-1}(U_{\lambda_2})\cup\cdots\cup f^{-1}(U_{\lambda_N})$ が存在する。このとき，$f(X)\subset U_{\lambda_1}\cup U_{\lambda_2}\cup\cdots\cup U_{\lambda_N}$ ■

定理 49 コンパクト空間 X 上の連続関数 $f:X\to\mathbb{R}$ には最小値，最大値が存在する。

証明 像 $f(X)\subset\mathbb{R}$ は有界閉集合。したがって，最小 $t_0\in f(X)$，最大 $t_1\in f(X)$ がある。$t_0=f(x_0)$ は f の最小値，$t_1=f(x_1)$ は f の最大値。■

定理 50 ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合である。

証明 X をハウスドルフ空間，K をそのコンパクト集合とする。$p\notin K$ として，$p\notin\overline{K}$ を示す。各点 $q\in K$ に対し，$p\neq q$ であるから，開集合 U_q,V_q で $p\in U_q,q\in V_q,U_q\cap V_q=\emptyset$ となるものがある。q が K 全体を動くとき族 $\mathcal{V}=\{V_q\}$ は K の開被覆。したがって，有限部分被覆 $K\subset V_{q_1}\cup V_{q_2}\cup\cdots\cup V_{q_N}$ を選ぶことができる。このとき，$U=U_{q_1}\cap U_{q_2}\cap\cdots\cap U_{q_N}$ とおけば，p の近傍で，どの V_{q_i} とも交わらず，したがって，K と交わらない。よって，$p\notin\overline{K}$ ■

注意 この証明において，$V=V_{q_1}\cup V_{q_2}\cup\cdots\cup V_{q_N}$ とおけば，$p\in U,K\subset V,U\cap V=\emptyset$ である。すなわち，1 点とコンパクト集合は開集合で分離できる。

注意 さらに，X がコンパクトのとき，K として，任意の閉集合をとることができる。したがって，コンパクトハウスドルフ空間は正則である。より強く，次の定理が成り立つ。

定理 51 コンパクトハウスドルフ空間は正規である。

証明 X コンパクトハウスドルフ空間とし，F_1,F_2 をたがいに交わらない閉集合とする。上で見たように X は正則である。各点 $p\in F_1$ に対し，$p\notin F_2$ であるから，開集合 U_p,V_p で $p\in U_p,F_2\subset V_p,U_p\cap V_p=\emptyset$ となるものがある。p が F_1 全体を動くとき族 $\mathcal{U}=\{U_p\}$ は F_1 の開被覆。したがって，有限部分被覆 $F_1\subset U_{p_1}\cup U_{p_2}\cup\cdots\cup U_{p_N}$ を選ぶことができる。$U=U_{p_1}\cup U_{p_2}\cup\cdots\cup U_{p_N}$ とおく。$F_1\subset U$ である。このとき，$V=V_{p_1}\cap V_{p_2}\cap\cdots\cap V_{p_N}$ とおけば，F_2 を含む開集合で，どの U_{p_i} とも交わらず，したがって，U と交わらない。よって，$F_1\subset U,F_2\subset V,U\cap V=\emptyset$ である。■

定理 52 コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続写像は閉写像である。特に，全単射ならば，同相写像である。

証明 X コンパクト空間，Y をハウスドルフ空間とし，$f : X \to Y$ を連続写像とする。$F \subset X$ を閉集合とすると，F はコンパクト。したがって，$f(F)$ はコンパクト。Y はハウスドルフであるから $f(F)$ は閉集合。全単射の閉写像は同相写像である。■

定理 53 X, Y をコンパクト空間とすると，積空間 $X \times Y$ はコンパクトである。

証明 $\mathcal{W} = \{W_\lambda\}$ を $X \times Y$ の開被覆とする。各 $(p, q) \in X \times Y$ に対し，$(p, q) \in W_\lambda$ となる W_λ がある。そこで，開集合 $U_{(p,q)} \subset X, V_{(p,q)} \subset Y$ を選んで $(p, q) \in U_{(p,q)} \times V_{(p,q)} \subset W_\lambda$ とすることができる。しばらく，p を固定する。$q \in Y$ を動かすと，$\mathcal{V}_p = \{V_{(p,q)}\}$ は Y の開被覆。したがって，有限開被覆 $Y = V_{(p,q_1)} \cup V_{(p,q_2)} \cup \cdots \cup V_{(p,q_N)}$ を選ぶことができる。ここで，$U_p = U_{(p,q_1)} \cap U_{(p,q_2)} \cap \cdots \cap U_{(p,q_N)}$ とおく。すると

$$\begin{aligned} U_p \times Y &= U_p \times \left(V_{(p,q_1)} \cup V_{(p,q_2)} \cup \cdots \cup V_{(p,q_N)}\right) \\ &= U_p \times V_{(p,q_1)} \cup U_p \times V_{(p,q_2)} \cup \cdots \cup U_p \times V_{(p,q_N)} \\ &\subset U_{(p,q_1)} \times V_{(p,q_1)} \cup U_{(p,q_2)} \times V_{(p,q_2)} \cup \cdots \cup U_{(p,q_N)} \times V_{(p,q_N)} \\ &\subset W_{\lambda_1} \cup W_{\lambda_2} \cup \cdots \cup W_{\lambda_N} \end{aligned}$$

ここで，$U_{(p,q_i)} \times V_{(p,q_i)} \subset W_{\lambda_i}$ である。このようにして，$U_p \times Y$ を有限個の $\mathcal{W}$ の元で覆うことができる。

ここから，$p \in X$ を動かす。各 p に対して，上記のような U_p を選ぶことができる。すると，$\mathcal{U} = \{U_p\}$ は X の開被覆。したがって，有限開被覆 $X = U_{p_1} \cup U_{p_2} \cup \cdots \cup U_{p_N}$ を選ぶことができる。すると

$$X \times Y = (U_{p_1} \cup U_{p_2} \cup \cdots \cup U_{p_N}) \times Y = U_{p_1} \times Y \cup U_{p_2} \times Y \cup \cdots \cup U_{p_N} \times Y$$

となり，各 $U_{p_i} \times Y$ を有限個の $\mathcal{W}$ の元で覆うことができる。■

問題

9.5 ハウスドルフ空間 X の閉集合族 $\{C_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ があり，$\bigcap_\lambda C_\lambda \neq \emptyset$ とする。開集合 U は $\bigcap_\lambda C_\lambda$ を含むものとする。ある C_{λ_0} がコンパクトとすると，有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \Lambda$ を選んで

$$C_{\lambda_0} \cap C_{\lambda_1} \cap \cdots \cap C_{\lambda_N} \subset U$$

とできる。

9.6 I^2 上 $(0, y) \sim (1, y)$ とすると，$I^2/\sim$ は円筒 $S^1 \times I$ と同相である。

9.7 I^2 上 $(0,y) \sim (1,1-y)$ とすると，$I^2/\sim$ はメビウスの帯と同相である。

9.8 I^2 上 $\partial I^2 \sim (0,0)$ とすると，$I^2/\sim$ は球面 S^2 と同相である。

9.9 I^2 上 $(0,y) \sim (1,y)$, $(x,0) \sim (x,1)$ とすると，$I^2/\sim$ はトーラス $S^1 \times S^1$ と同相である。

9.10 X をコンパクト，Y をハウスドルフとする。$f : X \to Y$ を連続全射とする。X 上 $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ とすると，$X/\sim$ と Y は同相である。

9.11 X, Y, Z をハウスドルフとし，$f : X \times Y \to Z$ を連続とする。$A \subset X$, $B \subset Y$ をコンパクトとし，$W \in Z$ を開集合で，$f(A \times B) \subset W$ とすると，開集合 $U \subset X$, $V \subset Y$ で $A \subset U$, $B \subset V$, $f(U \times V) \subset W$ となるものがある。

9.12 X, Y をハウスドルフ，さらに，X はコンパクトとする。$f : X \times Y \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。$y \in Y$ に対して，$M(y) = \sup\{f(x,y) \mid x \in X\}$ とおくと，$M(y)$ は Y 上の連続関数である。

9.13 問題 **8.24**, **8.25** の空間 X はコンパクトでない。

9.14 X をコンパクト，$\{f_n\}$ を X 上の実数値連続関数列で，すべての x すべての n で，$f_n(x) \leqq f_{n+1}(x)$ が成り立つものとする。$\{f_n\}$ が各点で連続関数 g に収束するとすると，収束は一様である。

9.15 X, Y をハウスドルフ，$f : X \to Y$ を連続とし，$\{F_n\}$ を X のコンパクト集合の減少列（$F_n \supset F_{n+1}$）とすると，$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n)$ が成り立つ。

9.16 X をコンパクトかつハウスドルフとし，$f : X \to X$ を連続写像とする。$\emptyset$ でないコンパクト集合 $A \subset X$ で，$f(A) = A$ となるものがある。

9.17 $\pi : X \to X/\sim$ を標準射影とし，Y をコンパクトかつハウスドルフとする。$\pi \times 1 : X \times Y \to X/\sim \times Y$ の定める $X \times Y$ 上の同値関係を $\sim_{\pi\times 1}$ と表すとき，$\pi \times 1$ の導く全単射 $X \times Y/\sim_{\pi\times 1} \to X/\sim \times Y$ は同相写像である。

9.18 $X = [-1,1]$ 上で，$x \sim -x$, $(|x| < 1)$ とする。$Y = X/\sim$ はハウスドルフでないコンパクト空間である。$A = \pi([0,1])$, $B = \pi([-1,0])$ とおくと，$A \subset Y$, $B \subset Y$ もコンパクトだが，$A \cap B \subset Y$ はコンパクトでない。また，1 点 $\pi(-1) \notin A$ と A は開集合で分離できない。

9.19 $X = [0,1] \times \mathbb{Z}$ 上で，$(x,n) \sim (x,m)$, $(0 \leqq x < 1)$ とする。$Y = X/\sim$ はハウスドルフでない。$A = \pi([0,1] \times \{0\})$ とおくと，$A \subset Y$ はコンパクトだが，$\overline{A} = Y$ はコンパクトでない。

（参考）チコノフの定理

定理 54 (チコノフ (Tikhonov) の定理) $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ をコンパクト空間の族とすると，積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ もコンパクトである。

この定理の証明には，集合論の定理が必要である。

定義 (順序集合) 集合 X 上の**順序**とは，X 上の二項関係 $\leqq$ で次の条件を満たすものをいう。

- (Ord1) $x \leqq x$ (反射律)
- (Ord2) $x \leqq y$ かつ $y \leqq x \Rightarrow x = y$ (反対称律)
- (Ord3) $x \leqq y$ かつ $y \leqq z \Rightarrow x \leqq z$ (推移律)

$\leqq$ を X 上の順序とするとき，対 $[X, \leqq]$ を**順序集合**という。さらに，順序 $\leqq$ が次の条件を満たすとき，**線形順序**という。

- (Ord4) $x \leqq y$ または $y \leqq x$

X の部分集合 A に対して，$b \in X$ が A の**上界**であるとは

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \leqq b$$

が成り立つときとする。

定義 (帰納的順序集合) 順序集合 $[X, \leqq]$ が**帰納的**であるとは，その任意の線形順序部分集合に上界が存在するとき。

すなわち，$[X, \leqq]$ は線形とは限らない順序集合で，部分集合 $Y \subset X$ をとるとき，$[Y, \leqq]$ が線形順序集合ならば，Y の上界 $a_Y \in X$ が存在するときである。
帰納的順序集合にでくわすことは比較的に少ない。

例 9.20 $\mathbb{Z}^+$ も $\mathbb{Z}$ も $\mathbb{Q}$ も $\mathbb{R}$ も帰納的でない。閉区間 $(-\infty, b]$ は帰納的である。

典型的な例は

例 9.21 X を集合とするとき，$Y = \mathcal{P}(X)$ とし，Y 上の順序を包含関係で定める。すなわち，$y, y' \in Y$ に対して

$$y \leqq y' \quad \Longleftrightarrow \quad y \subset y'$$

であると定めると，$[Y, \leqq]$ は帰納的順序集合である。

例 9.22 $[Y, \leqq]$ を上の通りとし，$Z \subset Y$ を有限部分集合の全体であるとすると，X が無限集合ならば，$[Z, \leqq]$ は帰納的順序集合ではない。

$[X, \leqq]$ が線形順序集合のとき，X の上界は X の最大元にほかならない。したがって，線形順序集合が帰納的になるのは，最大元が存在するときに限る。

一般の帰納的順序集合には，最大元が存在するとは限らないが，極大元なら存在することがわかる。それがツォルンの補題である。ここで，**極大元**とは，それより大きい元が存在しないような元のことである。

ツォルンの補題は，選択公理から導かれるものであるが，極大元の存在を示すとき，数学の広い範囲でよく用いられる。

定理 (ツォルン (Zorn) の補題) 帰納的順序集合には極大元が存在する。

証明 (チコノフの定理) $\mathcal{F}$ を $Z = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の有限交差閉集合族とし，共通部分は $\emptyset$ でないことを示す。

$\mathcal{F}$ に，有限交差性を保ったまま，どんどん Z の部分集合（閉とは限らない）をつけ加えることを考える。そのような部分集合族はたくさんあるから，その全体を

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F} \text{ を含む有限交差部分集合族 }\}$$

とおく。$\widetilde{\mathcal{F}}$ の元 $\mathcal{F}'$ が $\mathcal{F}$ を含む有限交差部分集合族なのである。$\mathcal{F}$ に，有限交差性を保ったまま，どのような Z の部分集合がつけ加えられるか，例をあげてみよう。

(i) $\mathcal{F}$ の元 F を含む Z の部分集合。

(ii) $\mathcal{F}$ の有限個の元 $F_1, F_2, \ldots, F_n$ の共通部分。

(iii) $\mathcal{F}$ のすべての元と交わる Z の部分集合。

$\widetilde{\mathcal{F}}$ には，包含関係により，自然に順序が定まり，順序集合になる。じつは，帰納的順序集合である。実際，$\tilde{\mathcal{F}}$ の線形順序部分集合とは有限交差部分集合族の族 $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ で，任意の 2 つ $\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{F}_\beta$ に対し $\mathcal{F}_\alpha \subset \mathcal{F}_\beta$ か $\mathcal{F}_\beta \subset \mathcal{F}_\alpha$ が成り立つときである。それらの上界は合併族 $\bigcup_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ で与えることができる。そこから有限個の部分集合 $F_{\alpha_1} \in \mathcal{F}_{\alpha_1}, F_{\alpha_2} \in \mathcal{F}_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_n} \in \mathcal{F}_{\alpha_n}$ を選べば，ある i に対し，$F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_n} \in \mathcal{F}_{\alpha_i}$ だからである。

そこで，ツォルンの補題を適用すると，$\mathcal{F}$ を含む極大有限交差部分集合族 $\mathcal{F}_{\max}$ が存在することがわかる。極大性より，たとえば，$\mathcal{F}_{\max}$ に対して，上の (i),(ii),(iii) を行っても，得られた集合はすでに $\mathcal{F}_{\max}$ に含まれているわけである。

各 $\lambda \in \Lambda$ に対し，$p_\lambda : Z = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ を射影とする。p_λ による $\mathcal{F}_{\max}$ の像 $\{p_\lambda(F) \mid F \in \mathcal{F}_{\max}\}$ は X_λ の有限交差集合族である。X_λ はコンパクトであるから，有限交差閉集合族 $\{\overline{p_\lambda(F)} \mid F \in \mathcal{F}_{\max}\}$ の共通部分は $\emptyset$ でない。点 $q_\lambda \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}_{\max}} \overline{p_\lambda(F)}$ を選ぶことができる。ここで，q_λ の任意の近傍 U_λ をとると，$F \in \mathcal{F}_{\max}$ に対して，$U_\lambda \cap p_\lambda(F) \neq \emptyset$　したがって，$p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \cap F \neq \emptyset$

すなわち，$p_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ はすべての $F \in \mathcal{F}_{\max}$ と交わるから，$p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \in \mathcal{F}_{\max}$ である。

すべての q_λ を並べて，$q = (q_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = Z$ すなわち $p_\lambda(q) = q_\lambda(\forall\lambda \in \Lambda)$ とおく。q を含む開基の元 $p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap p_{\lambda_2}^{-1}(U_{\lambda_2}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})$ と任意の $F \in \mathcal{F}_{\max}$ に対して，これらすべて $\mathcal{F}_{\max}$ の元であるから

$$p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap p_{\lambda_2}^{-1}(U_{\lambda_2}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \cap F \neq \emptyset$$

これは $q \in \overline{F}$ を示している。特に，F が閉ならば $q \in F$　したがって，もとの有限交差閉集合族 $\mathcal{F}$ に対して $F \in \mathcal{F}$ ならば $q \in F$　すなわち，$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$

■

（参考）整列可能定理とツォルンの補題

● 選択公理

次の，ごく当たり前に思える命題は，証明できないので，仮定する。

選択公理　集合族 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ において，各集合 X_λ は空でないとすると，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し，元 $x_\lambda \in X_\lambda$ を選ぶことができる。

このとき，(x_λ) は直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の元であるから，選択公理は次のように表すことができる。

選択公理　$X_\lambda \neq \emptyset\ (\forall\lambda \in \Lambda)\ \Rightarrow\ \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$

選択公理は次の形で使用することが多い。

定理　(選択関数定理)　空集合を含まない集合族 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して，写像（関数）

$$\varphi : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

で，各元 $\lambda \in \Lambda$ に対して

$$\varphi(\lambda) \in X_\lambda$$

となるものが存在する。

証明　各 $\lambda \in \Lambda$ に対し，元 $x_\lambda \in X_\lambda$ を選んで，$\varphi(\lambda) = x_\lambda$ と定めればよい。

■

● 整列集合

次の事実はよく知られている。

整列原理 $\mathbb{Z}^+$ の空でない部分集合には最小元がある。

一般に，空でない任意の部分集合が最小元をもつような線型順序集合を**整列集合**という。また，そのような順序を**整列順序**という。

例 9.23 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ はいずれも整列集合ではない。

例 9.24 (i) $\left\{ n - \dfrac{1}{m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ は整列集合である。

(ii) $\left\{ n - \dfrac{1}{m + 1 - \dfrac{1}{l}} \;\middle|\; n, m, l \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ は整列集合である。

整列集合 $[X, \leqq]$ をひとつのギリシャ文字で表すことが多い。

$$\alpha = [X, \leqq]$$

2 つの線型順序集合 $[X, \leqq]$ と $[Y, \leqq]$ が与えられたとき，積集合 $X \times Y$ 上の順序 $\leqq$ を次のように定める。

$$(x, y) \leqq (x', y') \quad \Longleftrightarrow \quad y < y' \quad \text{または} \quad \begin{cases} y = y' \\ \text{かつ } x \leqq x' \end{cases}$$

この順序を積集合上の**反辞書式順序**という。

定理 $\alpha = [X, \leqq], \beta = [Y, \leqq]$ を整列集合とする。$X \times Y$ 上の反辞書式順序は整列順序である。

この反辞書式順序を考えた積集合を**整列集合の積**といい，$\alpha \times \beta$ で表す。

また，2 つの線型順序集合 $[X, \leqq], [Y, \leqq]$ に対し，集合 X, Y の直和

$$X \sqcup Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\} \subset (X \cup Y) \times \{0, 1\}$$

の上の順序 $\leqq$ を

$$(x, \varepsilon) \leqq (x', \varepsilon') \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon < \varepsilon' \quad \text{または} \quad \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon' \\ \text{かつ } x \leqq x' \end{cases}$$

と定める。この順序を**順序の直和**と呼ぶ。

定理 $\alpha = [X, \leqq], \beta = [Y, \leqq]$ を整列集合とする。$X \sqcup Y$ 上の直和順序は整列順序である。

この整列集合を**整列集合の和**といい，$\alpha+\beta$ で表す。

2 つの順序集合 $[X,\leqq]$, $[Y,\leqq]$ の間の写像 $f:X\to Y$ が**順序同型写像**であるとは，f は全単射で条件

$$x\leqq y \quad\Longleftrightarrow\quad f(x)\leqq f(y)$$

を満たすときである。そのような f が存在するとき，$[X,\leqq]$ と $[Y,\leqq]$ は**順序同型**であるという。

特に，整列集合に対しては，順序同型な整列集合は**同じ順序数**を定めるという。

よく知られた整列集合を次の記号で表す。これらの記号は，その整列集合の定める順序数を表すとも考える。

$$\begin{aligned}
0 &= [\emptyset,\leqq]\\
1 &= [\{0\},\leqq]\\
2 &= [\{0,1\},\leqq]\\
&\cdots\\
n &= [\{0,1,2,\ldots,n-1\},\leqq]\\
&\cdots\\
\omega &= [\mathbb{Z}^+,\leqq]
\end{aligned}$$

以下は，これらの整列集合から構成される順序数である。

$$\begin{aligned}
&\omega+1,\omega+2,\ldots,\omega+n,\ldots\\
&\omega+\omega=\omega\times 2,\omega\times 2+1,\ldots,\omega\times 2+\omega=\omega\times 3,\omega\times 3+1,\ldots\\
&\omega\times 4,\ldots,\omega\times 5,\ldots,\omega\times\omega,\ldots\\
&\omega\times\omega\times\omega,\ldots,\omega\times\omega\times\omega\times\omega,\ldots
\end{aligned}$$

さらに，このあとには，構成は述べないが

$$\omega^{\omega},\omega^{\omega^{\omega}},\ldots,\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}},\ldots$$

と表せる順序数もある。最後の順序数は最初の ε 数といわれる。これらのの順序数を与える整列集合の濃度はすべて可算である。

参考までに，2 つの整列集合 α,β に対し，α^{β} と表される整列集合の構成を与えよう。$\alpha=[X,\leqq],\beta=[Y,\leqq]$ とすると，整列集合を与える集合は，集合の巾乗すなわち

$$X^{Y}=\text{“}Y\text{ から }X\text{ への写像全体”}=\{f:Y\to X\}$$

としたいところだが，X^Y 上の自然な順序は整列順序ではない。整列順序にするためには，X の最小元を x_0 とするとき

$$X_0^Y = \{f \in X^Y \mid f(y) \neq x_0 \text{となる } y \in Y \text{ は有限個 }\}$$

に制限する必要がある。その上の順序 $\leqq$ は次のように定める。

$$f \leqq g \quad \Longleftrightarrow \quad f(y) \neq g(y) \text{ となる最大の } y \text{ に対して } f(y) < g(y)$$

整列集合 $\alpha = [X, \leqq]$ の元 a に対し，a が最大元でないとき

$$a_1 = \min\{x \in X \mid x > a\}$$

を a の**直後の元**という。また，その任意の元 a に対して

$$X\langle a\rangle = \{x \in X \mid x < a\}$$
$$\alpha\langle a\rangle = [X\langle a\rangle, \leqq]$$

とおき，$\alpha\langle a\rangle$ をの元 a による**切片**という。

定理　整列集合は，そのいかなる切片とも順序同型にはならない。

証明　α= $[X, \leqq]$ を整列集合，$\alpha\langle a\rangle$ をその切片とする。順序同型写像 $f : X \to X\langle a\rangle$ が存在したとする。

$$A = \{x \in X \mid f(x) < x\}$$

とおく。$f(a) \in X\langle a\rangle$ より，$f(a) < a$，すなわち，$a \in A$ である。A の最小元を a_0 とおく。...

定理　2 つの整列集合が順序同型のとき，それらの間の順序同型写像は一意的である。

証明　$\alpha = [X, \leqq]$ と $\beta = [Y, \leqq]$ が順序同型であるとする。2 つの順序同型写像 $f : X \to Y, g : X \to Y$ が存在したとして $f = g$ を示せばよい。$f \neq g$ とすると

$$X_1 = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$$

は空でないから，最小元 x_0 が存在する。$f(x_0) < g(x_0)$ か $f(x_0) > g(x_0)$ である。$f(x_0) < g(x_0)$ とすると，g は順序同型写像だから

$$g^{-1} \circ f(x_0) < x_0$$

左辺は x_0 より小さいから X_1 の元ではない。したがって

$$f \circ g^{-1} \circ f(x_0) = g \circ g^{-1} \circ f(x_0) = f(x_0)$$

f は単射だから

$$g^{-1} \circ f(x_0) = x_0 \quad \text{ゆえに} \quad f(x_0) = g(x_0)$$

これは矛盾。$f(x_0) > g(x_0)$ のときも同様。■

定理 2 つの整列集合が順序同型でないとき，いずれか片方は，もう片方の切片と順序同型である。

証明 $\alpha=[X,\leqq]$ と $\beta=[Y,\leqq]$ とが順序同型でないとする。α の切片 $\alpha\langle a\rangle$ との切片 $\beta\langle b\rangle$ とは順序同型になるかもしれない。そこで

$$X_1=\{a\in X \mid \text{ある } b\in Y \text{ に対して } \alpha\langle a\rangle\cong\beta\langle b\rangle\}$$
$$Y_1=\{b\in Y \mid \text{ある } a\in X \text{ に対して } \alpha\langle a\rangle\cong\beta\langle b\rangle\}$$

とおく。$b\neq b'$ に対して，片方はもう片方の切片になるから，$\beta\langle b\rangle$ と $\beta\langle b'\rangle$ は順序同型ではない。したがって，$a\in X_1$ に対して，$\alpha\langle a\rangle\cong\beta\langle b\rangle$ となる b はただ 1 つだけであり，$b\in Y_1$ である。よって，$a\in X_1$ に $b\in Y_1$ を対応させると，順序同型写像 $f:X_1\to Y_1$ が定まる。

さて，$X_1\subset X, Y_1\subset Y$ であった。α と β とは順序同型でないから，$X-X_1, Y-Y_1$ はともに空ということはない。$X-X_1\neq\emptyset$ として，その最小元を a_0 とおく。$a\in X_1$ かつ $a'<a$ ならば，$a'\in X_1$ であるから，a_0 より大きい X_1 の元はない。すなわち，$[X_1,\leqq]=\alpha\langle a_0\rangle$ である。さらにここで，$Y-Y_1\neq\emptyset$ とし，その最小元を b_0 とおけば，$[Y_1,\leqq]=\beta\langle b_0\rangle$ で，$\alpha\langle a_0\rangle\cong\beta\langle b_0\rangle$ となり，$a_0\notin X_1$ に矛盾する。すなわち，$X-X_1\neq\emptyset$ ならば，$Y_1=Y$ で β は $\alpha\langle a_0\rangle$ と順序同型である。また，$Y-Y_1\neq\emptyset$ のときは，同様に，$\alpha\cong\beta\langle b_0\rangle$ を得る。
■

このように，順序数どうしはつねに比較でき，大小が定まる。α が β の切片に順序同型のとき $\alpha<\beta$，α と β が順序同型のとき $\alpha=\beta$，$\alpha<\beta$ または $\alpha=\beta$ のとき $\alpha\leqq\beta$ と表す。

定理 $\alpha=[X,\leqq],\beta=[Y,\leqq]$，かつ，$Y\subset X$ とすると $\beta\leqq\alpha$

定理 順序数よりなる集合 X があるとすると，自然に定まる順序 $\leqq$ に対して，$[X,\leqq]$ は整列集合。

● 整列可能定理

前項において，多くの整列集合の例を挙げたが，それらはいずれも可算集合の上の整列順序であった。この章では，非可算集合上に，じつは，さらに一般に，任意の集合上に，整列順序が存在することを証明する。証明には選択公理が用いられる。形式的な議論の結果，整列順序の存在が示されるが，それによって，$\mathbb{R}$ 上の整列順序を記述することが可能になるわけではない。

定理 (整列可能定理) 任意の集合上には整列順序が存在する。

X を任意の集合としよう。我々は整列順序を X 上に構成したいのである。何も手がかりはないのだから，もっとも素朴な方法を考えよう。ひとつ最小元を選んで a_0 としよう。それ以外の元から次の最小元を選んで a_1 とする。これを続けてある程度進んだとして，次の元は，すでに選ばれた元を除いたところから選べばいいのである。このような，選び方を記述するために，選択関数を利用しよう。

証明は基本的な設定のもとに，いくつかの主張に分けて行われる。

基本設定　(i) X を集合とし，X の空でない部分集合全体のつくる集合族上の選択関数 $\varphi : \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \to X$ をひとつ固定して考える。すなわち，X の空でない部分集合 W に対し，$\varphi(W)$ は W の元を与える。

(ii) X の部分集合 W と，その上に定義された整列順序 $\leqq^W$ との対 $[W, \leqq^W]$ が次の条件を満たすとき φ **整列**であるという。すなわち

$$\text{“任意の } x \in W \text{ に対して } \varphi(X - W\langle x\rangle) = x\text{”}$$

主張 1　(i) 列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ を

$$\begin{aligned} a_0 &= \varphi(X) \\ a_1 &= \varphi(X - \{a_0\}) \\ a_2 &= \varphi(X - \{a_0, a_1\}) \\ &\cdots \end{aligned}$$

とおき，その上の順序関係を

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$$

とおくと $[\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}, \leqq]$ は φ 整列集合である。

(ii) また，任意の φ 整列集合の最小元は $a_0 = \varphi(X)$ である。

主張 2 2 つの φ 整列集合 $\alpha = [W, \leqq^W]$, $\beta = [V, \leqq^V]$ があれば，そのどちらか片方はもう片方の切片である。

証明　整列集合の比較定理より $\alpha \leqq \beta$ か $\beta \leqq \alpha$ が成り立つ。$\alpha \leqq \beta$ として議論を進める。順序同型写像 $f : W \to V$ が存在するか，または，ある $y \in V$ に対して，順序同型写像 $f : W \to V\langle y\rangle$ が存在する。後者の場合には $f : W \to V\langle y\rangle \subset V$ と考えて，いずれの場合にも，順序を保つ単射 $f : W \to V$ を得る。W の部分集合 W' を

$$W' = \{x \in W \mid f(x) \neq x\}$$

とおく。$W' = \emptyset$ ならば主張は示された。$W' \neq \emptyset$ とすると，$[W', \leqq^W]$ は整列集合であるから最小元 x' が存在する。. . .

はじめて見る人は，次のステップを見て，驚くかもしれない。X のすべての φ 整列集合の合併をとるのである。すなわち，よくわからない集合 X に対し，そのすべての部分集合を考え，そのひとつひとつの部分集合に対し，その上のすべての順序関係を考え，そのうち整列順序になっているものだけをとりだし，それらの整列順序のうち，φ 整列になっているものだけを考えるのである。もちろん，部分集合によっては，そのような条件を満たす順序関係はないかもしれない。整列順序があるような X の部分集合は非常に少ないと予想できる。だから，あやふやな，よくわからない世界にいるような気がしてくるが，今までに述べてきた構成はすべて集合論上許されるもので，条件，すなわち，順序関係は整列順序か，とか，その整列順序は整列か，とかは，すべて，成り立つかどうかきちんと定まるものである。したがって，X の φ 整列部分集合の全体というものは確定した集合族である。

主張 3 X のすべての φ 整列集合の合併集合 W_∞ は φ 整列集合である。

証明 前主張より，W_∞ の 2 元は，ある 1 つの φ 整列集合に含まれる。したがって，W_∞ は自然に定まる順序で線形順序集合である。さらに，整列集合であることがわかる。φ 整列であることを示そう。...

主張 4 $W_\infty = X$ である。

証明 $W_\infty \neq X$ とする。$a_\infty = \varphi(X - W_\infty)$ とおき，$W_{\infty+1} = W_\infty \cup \{a_\infty\}$ で a_∞ は $W_{\infty+1}$ の最大元であるとする。そのとき，$W_{\infty+1}$ が φ 整列集合であることをみよう。...

• ツォルンの補題の証明

ツォルンの補題の証明には帰謬法を用いる。すなわち，X を極大元のない帰納的順序集合であるとして，矛盾を導く。

基本設定 (i) Y を任意の整列集合とする。すると，以下の議論にしたがって，Y から X への順序を保つ単射を構成することができる。これから矛盾を導くことができる。実際，X より濃度の大きい集合 Y は存在し，整列定理より，Y を整列集合とする順序が存在するからである。

(ii) まず，X の部分集合族上の選択関数 $\varphi : \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \to X$ をひとつ固定する。X に対して次の 2 つの写像を定める。各元 $x \in X$ に対して，x は極大元でないから，x より大きな元全体 $\{y \in X \mid y > x\}$ は空でない。そこで $g(x) = \varphi(\{y \in X \mid y > x\})$ とおく。g は X から X への写像で，$g(x) > x$ が常に成り立つ。

(iii) X は帰納的順序集合であるから，その線型順序部分集合 A に対して，上界全体の集合 $\{y \in X \mid a \in A \Rightarrow y \geqq a\}$ は空でない。各 A に対して，$h(A) = \varphi(\{y \in X \mid a \in A \Rightarrow y \geqq a\})$ とおく。h は X の線型順序部分集合の全体から X への写像で，$h(A)$ は常に A の上界である。さらに，A に最大元がなければ $h(A)$ は A の任意の元より大きい。特に，$A = \emptyset$ は線型順序部分集合であるから，$\emptyset$ に対しても，$h(\emptyset)$ が定まり，$h(\emptyset) = \varphi(X)$ である。

(iv) 一般に，整列集合 Y の元 y に対して，y 切片 $Y\langle y\rangle$ に最大元 y_0 が存在するとき，y は直前の元をもつといい，y_0 を y の直前の元，y を y_0 の直後の元という。整列集合のある元に対して，最大元でなければ直後の元は必ず存在するが，最小元でなくても直前の元は存在するとは限らない。たとえば，$\omega + 1$ の最大元には直前の元はない。

(v) 順序を保つ単射 $f : Y \to X$ を次のようにして構成する。Y の任意の切片 $Y\langle y\rangle$ 上の写像 $f_y : Y\langle y\rangle \to X$ で次の性質をもつものを考える。

$$(*) \begin{cases} a \in Y \text{ が直前の元 } b \text{ をもつとき} & f_y(a) = g(f_y(b)) \\ a \in Y \text{ が直前の元をもたないとき} & f_y(a) = h(f_y(Y\langle a\rangle)) \end{cases}$$

主張 1 たとえば，$Y = \omega + 1 = \{0, 1, 2, \ldots \quad , \omega\}$ のとき，$x_0 = \varphi(X)$ とおいて

$$\begin{aligned} f_\omega(0) &= x_0 \\ f_\omega(1) &= g(x_0) \\ f_\omega(2) &= g(g(x_0)) \\ &\cdots \end{aligned}$$

とおけば，f_ω は上の $(*)$ を満たす。

主張 2 $y' < y \in Y$ に対して，$(*)$ を満たす $f_{y'}, f_y$ が存在すれば，$Y\langle y'\rangle$ 上 f_y は $f_{y'}$ と一致する。

主張 3 $a \in Y$ に対して，その直後の元を a_+ とする。f_a が存在するとき，f_{a_+} を次のように定めると，f_{a_+} も上の $(*)$ を満たす。

$$\begin{cases} a \in Y \text{ が直前の元 } a_- \text{ をもつとき} & f_{a_+}(a) = g(f_a(a_-)) \\ a \in Y \text{ が直前の元をもたないとき} & f_{a_+}(a) = h(f_a(Y\langle a\rangle)) \end{cases}$$

主張 4 $a \in Y$ に対して，直前の元が存在しないとし，$b < a$ なるすべての b に対し f_b が存在するものとする。そのとき，f_a を次のように定めると，f_a も上の $(*)$ を満たす。

$$f_a(b) = f_{b_+}(b)$$

主張 5 すべての $a \in Y$ に対し，上の $(*)$ を満たす f_a が一意的に存在する。

これにより，すべての y 切片上 f_y は定義された。Y に，あらたに最大元 $y_{\max}$ をつけ加えて得られる整列集合を $Y+1$ とし，それに上記の議論を適用すると，$Y=(Y+1)\langle y_{\max}\rangle$ であるから，求める $f : Y \to X$ が得られる。■

10 連結空間

定義 (連結空間) 位相空間 X が部分空間 X_1, X_2 の**直和**に分かれているとは，$X_1, X_2 \subset X$ は開集合で

$$X = X_1 \cup X_2,\ X_1 \cap X_2 = \emptyset$$

となるとき。このとき，X_1, X_2 は X の閉かつ開集合である。$\emptyset$ でない部分空間の直和に分かれないとき，X は**連結**であるという。一般に，位相空間 X の部分集合 A が連結であるとは，部分空間として連結であるとき。

例 10.1 部分集合 $\mathbb{R} - \{t\}$ は連結でない。■

定理 55 位相空間 X において，次の 3 条件は同値である。

(a) X は連結。

(b) X の閉かつ開集合は $\emptyset$ と X に限る。

(c) $\{0, 1\}$ を 2 点からなる離散空間とする。X から $\{0, 1\}$ への全射連続写像は存在しない。

証明 "(a) $\Rightarrow$ (b)" $\emptyset$ でも X でもない閉かつ開集合 U があるとすると，$V = X - U$ も閉かつ開集合。したがって，$X = U \cup V$ は自明でない直和分解である。

"(b) $\Rightarrow$ (c)" f を X から $\{0, 1\}$ への全射連続写像とする。$f^{-1}(0)$ は $\emptyset$ でも X でもない。さらに，$\{0\}$ は $\{0, 1\}$ の閉かつ開集合であるから，$f^{-1}(0) \subset X$ も閉かつ開である。

"(c) $\Rightarrow$ (a)" X が連結でないとすると，直和分解 $X = X_1 \cup X_2$ がある。$f : X \to \{0, 1\}$ を $f(X_1) = \{0\}, f(X_2) = \{1\}$ とおけば，X から $\{0, 1\}$ への全射連続写像である。■

例 10.2 数直線 $\mathbb{R}$ は連結である。$\mathbb{R}$ の連結集合は区間（開，閉，半開，有限，無限）に限る。■

定理 56 X を連結空間，Y を位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像とするとき，像 $f(X)$ は Y の連結集合である。

証明 像 $f(X)$ が連結でないとすると，部分空間 $f(X)$ から $\{0, 1\}$ への全射連続写像 g がある。$g \circ f : X \to f(X) \to \{0, 1\}$ は全射かつ連続。■

系 (中間値定理) X を連結空間，$f : X \to \mathbb{R}$ を連続関数とする。2 点 $p_0, p_1 \in X$ に対し，$f(p_0) < c < f(p_1)$ とすると，$f(q) = c$ となる $q \in X$ がある。

証明 像 $f(X) \subset \mathbb{R}$ は連結であるから区間である。■

定理 57 X を位相空間，$A \subset X$ を連結集合とする。部分集合 $B \subset X$ が $A \subset B \subset \overline{A}$ を満たすとき，B も連結集合である。

証明 f を B から $\{0,1\}$ への連続関数とする。B 上，定値であることを見ればよい。$f|_A : A \to \{0,1\}$ は連続関数であるから定値。$f(A) = \{0\}$ であるとする。$p \in B$ で $f(p) = 1$ とすると，B における p の近傍 U_B で，$f(U_B) = \{1\}$ となるものがある。そのとき，X における p の近傍 U で，$U_B = U \cap B$ となるものがある。$p \in \overline{A}$ であるから，$U \cap A \neq \emptyset$。そこで，$q \in U \cap A$ をとれば，$q \in U_B$　したがって，$f(q) = 1$　これは $f(A) = \{0\}$ に矛盾。■

例 10.3 平面 $\mathbb{R}^2$ において，$A = \left\{ \left(t, \sin \dfrac{1}{t} \right) \middle| \, t > 0 \right\}$ とおくと，$\overline{A} = A \cup \{(0,s) \mid -1 \leqq s \leqq 1\}$ は連結である。さらに，$\{(0,s) \mid -1 \leqq s \leqq 1\}$ の任意の部分集合 B に対して，$A \cup B$ も連結である。■

例 10.4 連結集合の減少列の共通部分は連結とは限らない。前の例において，$A_n = \left\{ \left(t, \sin \dfrac{1}{t} \right) \middle| \, 0 < t < \dfrac{1}{n} \right\}$ とおき，$B_0 = \{(0, \pm 1)\}$ とおくと，$A_n \cup B_0$ は連結だが，$\bigcap_n (A_n \cup B_0) = B_0$ は連結でない。■

定理 58 ハウスドルフ空間においてコンパクト連結集合の減少列の共通部分は連結である。

証明 X をハウスドルフ空間，$K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ をコンパクト連結集合の減少列とする。$K_0 = \bigcap_n K_n$ とおき，K_0 の連結性を示す。連結でないとして矛盾を導く。たがいに交わらない空でない閉集合の合併 $K_0 = K_0' \cup K_0''$ に分かれたとする。K_1 は正規であるから，X の開集合 U, V で，$K_0' \subset U, K_0'' \subset V, U \cap V \cap K_1 = \emptyset$ となるものがある。今，$K_0 = \bigcap_n K_n \subset U \cup V$ である。このとき，十分大きな N に対して，$K_N \subset U \cup V$ である。実際，$W_n = X - K_n$ とおくと，$\bigcup_n W_n = X - \bigcap_n K_n = X - K_0$ である。したがって，U, V と合わせれば，K_1 を覆う。コンパクト性より，そのうち有限個で覆われる。$W_1 \subset W_2 \subset \cdots$ であることより，$K_1 \subset U \cup V \cup W_N$，すなわち，$K_N \subset U \cup V$ である。ところが，K_N は連結で，$U \cap V \cap K_N = \emptyset$ であるから，$U \cap K_N = \emptyset$ または $V \cap K_N = \emptyset$　よって，$K_0' = U \cap K_0 = \emptyset$ または $K_0'' = V \cap K_0 = \emptyset$ これは矛盾。■

問 10.5 コンパクト性の仮定をはずすと，反例がある。すなわち，連結集合の減少列 $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$ で，$\bigcap_i C_i$ は連結でないものがある。

定理 59 X を位相空間，$\{A_\lambda\}$ を X の連結集合の族とする。$\displaystyle\bigcap_\lambda A_\lambda \neq \emptyset$ ならば，$\displaystyle\bigcup_\lambda A_\lambda$ も連結集合である。

証明　f を $\bigcup_{\lambda} A_\lambda$ から $\{0,1\}$ への連続関数とする。$\bigcup_{\lambda} A_\lambda$ 上，定値であることを見ればよい。$p \in \bigcap_{\lambda} A_\lambda$ をとる。$f(p) = 0$ とする。f は A_λ 上定値で，$f(p) = 0$ であるから，$f(A_\lambda) = \{0\}$　すべての λ について正しいから，$f\left(\bigcup_{\lambda} A_\lambda\right) = \{0\}$　■

定理 60 2 つの連結空間の積空間は連結である。

証明　X, Y を連結空間とする。$q_0 \in Y$ を固定するとき，$X \times \{q_0\}$ は $X \times Y$ の連結集合である。各 $p \in X$ に対し，$\{p\} \times Y$ も $X \times Y$ の連結集合である。この 2 つは点 (p, q_0) で交わるから，$A_p = X \times \{q_0\} \cup \{p\} \times Y$ も連結である。$\bigcap_{p \in X} A_p = X \times \{q_0\} \neq \emptyset$ であるから，$\{A_p\}$ に定理を適用すれば，$\bigcup_{p \in X} A_p = X \times Y$ は連結であることがわかる。■

例 10.6 $\mathbb{R}^n$ は連結である。立体射影より，$\mathbb{R}^n \approx S^n - \{(0, \ldots, 0, \pm 1)\}$ であり，$n \geqq 1$ のとき，$(S^n - \{(0, \ldots, 0, 1)\}) \cap (S^n - \{(0, \ldots, 0, -1)\}) \neq \emptyset$ であるから，S^n も連結である。さらに，したがって，$\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} \approx S^n \times \mathbb{R}$ も連結である。

一方，$\mathbb{R}^1 - \{0\}$ は連結でない。したがって，$\mathbb{R}$ と $n \geqq 2$ に対しての $\mathbb{R}^n$ は同相でない。2 つの空間が同相ならば，それらから 1 点ずつを除いた空間も同相だからである。■

定理 61 $\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ を連結空間の族とすると，積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ も連結である。

証明　各 $\lambda \in \Lambda$ に対し，$p_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ を射影とする。各 X_λ から $q_\lambda \in X_\lambda$ をひとつ選んで，1 点 $q = (q_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を定める。添え字集合 Λ の有限部分集合 Λ' に対し，写像 $i^{(q)}_{\Lambda'} : \prod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda \to \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を次のように定める。すなわち，$(x_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$ に対し

$$i^{(q)}_{\Lambda'}((x_\lambda)) = (y_\lambda),\ \text{ただし}\ y_\lambda = \begin{cases} x_\lambda & (\lambda \in \Lambda') \\ q_\lambda & (\lambda \in \Lambda - \Lambda') \end{cases}$$

と定める。明らかに，$i^{(q)}_{\Lambda'}$ は連続。前定理より，定義域 $\prod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda$ は連結であるから，像を $X^{(q)}_{\Lambda'} = i^{(q)}_{\Lambda'}\left(\prod_{\lambda \in \Lambda'} X_\lambda\right)$ とおくと，$X^{(q)}_{\Lambda'} \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ は連結集合。また，$q \in X^{(q)}_{\Lambda'}$ である。

$$X^{(q)}_{\Lambda'} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda - \Lambda'} p_\lambda^{-1}(q_\lambda) = \left\{ (x_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \;\middle|\; x_\lambda = q_\lambda,\ \lambda \in \Lambda - \Lambda' \right\}$$

ここで，Λ' が Λ の有限部分集合全体を動くときの $X_{\Lambda'}^{(q)} \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 全体の合併集合を $X^{(q)}$

$$X^{(q)} = \bigcup_{\Lambda'\subset\Lambda \text{有限}} X_{\Lambda'}^{(q)} \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

とおくと，$\bigcap_{\Lambda'\subset\Lambda\text{有限}} X_{\Lambda'}^{(q)} = \{q\} \neq \emptyset$ であるから連結集合である。

最後に，$\overline{X^{(q)}} = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を示せば，十分である。実際，任意の点 $(x_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に対し，その点の近傍 N をとると，有限集合 $\Lambda' = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N\}$ と開近傍 $x_{\lambda_1} \in U_{\lambda_1}, x_{\lambda_2} \in U_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_N} \in U_{\lambda_N}$ で

$$(x_\lambda) \in p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap p_{\lambda_2}^{-1}(U_{\lambda_2}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_N}^{-1}(U_{\lambda_N}) \subset N$$

となるものがある。このとき

$$i_{\Lambda'}^{(q)}((x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, \ldots, x_{\lambda_N})) \in \left(p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_N}^{-1}(U_{\lambda_N})\right) \cap X_{\Lambda'}^{(q)}$$

これより，$N \cap X^{(q)} \neq \emptyset$ ■

定理 62 X を位相空間とする。

(i) $p \in X$ に対し，p を含む最大の連結集合 $C(p)$ が存在する。

(ii) $C(p) \subset X$ は閉集合である。

(iii) $p, q \in X$ に対して，$C(p) \cap C(q) = \emptyset$ であるか $C(p) = C(q)$ である。

証明 "(i)" p を含む X の連結集合全体の合併集合を $C(p)$ とおけば，$C(p)$ は連結である。

"(ii)" $\overline{C(p)}$ も p を含む連結集合である。

"(iii)" $C(p) \cap C(q) \neq \emptyset$ とすると，$C(p) \cup C(q)$ は連結で p を含む。よって，$C(p) \cup C(q) \subset C(p)$　同時に q を含む。よって，$C(p) \cup C(q) \subset C(q)$　以上より，$C(p) = C(q)$ である。■

定義 位相空間 X に対し，上記 $C(p)$ を**連結成分**という。X はいくつかの連結成分に分割される。すべての $p \in X$ に対し，$C(p) = \{p\}$ となるとき，X は**完全不連結**であるという。

例 10.7 $X = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$ の連結成分は

$$(-\infty, 0],\ \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \,\middle|\, n = 1, 2, 3, \ldots \right\},\ (1, \infty)$$

例 10.8 カントール集合 C は完全不連結。$\mathbb{Q}, \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ も完全不連結。

例 10.9 ソルゲンフレイ直線 $\mathbb{R}_{Sor}$ も完全不連結。

注意　1 点の連結成分は，その点を含む任意の閉かつ開集合に含まれる。 ■

例 10.10 1 点の連結成分とその点を含むすべての閉かつ開集合の共通部分は異なることがある。実際，$X \subset \mathbb{R}^2$ を

$$X = \left\{ \left(\pm\frac{\pi}{2}, y\right) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ (x, n + \sec x) \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

とおくと，点 $\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$ の連結成分は $\left\{ \left(\frac{\pi}{2}, y\right) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}$ だが，その点を含むすべての閉かつ開集合の共通部分は $\left\{ \left(\pm\frac{\pi}{2}, y\right) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}$ である。

定理 63 X をコンパクトハウスドルフ空間とする。そのとき，任意の 1 点の連結成分とその点を含むすべての閉かつ開集合の共通部分とは一致する。

証明　x を含む閉かつ開集合の全体を $\{Z_\lambda\}$ とし，$Z_0 = \bigcap_\lambda Z_\lambda$ をその共通部分とする。Z_0 が連結であることを示せばよい。Z_0 が連結でないと仮定して矛盾を導く。Z_0 は $\emptyset$ でない，たがいに交わらない 2 つの閉集合の合併に表される。$Z_0 = Z_0' \cup Z_0'', x \in Z_0'$ とする。Z_0', Z_0'' は X の閉集合であるから，X の正規性より，開集合 U, V で，$Z_0' \subset U, Z_0'' \subset V, U \cap V = \emptyset$ となるものがある。すると，$Z_0 \subset U \cup V$ である。ここで，$W_\lambda = X - Z_\lambda$ とおくと，これらは開集合でもあり，$\bigcup_\lambda W_\lambda = X - Z_0$ である。したがって，U, V と合わせて，X の開被覆が得られ，有限部分被覆

$$X = U \cup V \cup W_{\lambda_1} \cup W_{\lambda_2} \cup \cdots \cup W_{\lambda_N}$$

を選ぶことができる。したがって，$Z_{\lambda_1} \cap Z_{\lambda_2} \cap \cdots \cap Z_{\lambda_N} \subset U \cup V$ である。左辺は閉かつ開集合，右辺はたがいに交わらない開集合であるから，$\widetilde{Z}_0' = Z_{\lambda_1} \cap Z_{\lambda_2} \cap \cdots \cap Z_{\lambda_N} \cap U, \widetilde{Z}_0'' = Z_{\lambda_1} \cap Z_{\lambda_2} \cap \cdots \cap Z_{\lambda_N} \cap V$ は閉かつ開集合で，$x \in \widetilde{Z}_0' \subset U, \widetilde{Z}_0'' \subset V$ である。

　そうすると，$\widetilde{Z}_0'$ は，はじめの Z_λ のひとつであり，したがって，$Z_0 \subset U$ となるが，これは，はじめの仮定 $Z_0 - U = Z_0'' \neq \emptyset$ に矛盾する。■

問題

10.11 $i \in \mathbb{Z}$ に対して，$A_i \subset X$ を連結集合とし，$A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ とすると，$\bigcap_i A_i$ も連結である。

10.12 $A \subset X$ とし，$C \subset X$ を A とも $X - A$ とも交わる連結集合とする。そのとき，C は境界 ∂A とも交わる。

10.13 X が連結である必要十分条件は，X の任意の開被覆 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}$ に属する任意の U_α, U_β に対し，$\mathcal{U}$ の元の有限列 $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_N}$ で

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \alpha_N, \quad U_{\alpha_{i-1}} \cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset,\ (i = 1, 2, \ldots, N)$$

となるものが存在することである。

10.14 数直線の開集合 $U \subset \mathbb{R}$ に対し，どの 2 つも交わらない可算個の開区間 $\{(a_n, b_n)\}$ で，$U = \bigcup_n (a_n, b_n)$ と表すことができる。

10.15 $X \subset \mathbb{R}^2$ を

$$X = \left\{(x,y) \;\middle|\; x = \pm\frac{\pi}{2}\right\} \cup \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \left\{(x,y) \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y = \frac{1}{\cos x} + n\right\}$$

とおく。点 $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ を含む，X のすべての閉かつ開集合の共通部分を求めよ。

10.16 $n \in \mathbb{N}$ に対し，長方形 $R_n \subset \mathbb{R}^2$ を

$$R_n = \left\{(x,y) \;\middle|\; |x| \leqq \frac{n}{n+1},\ |y| \leqq n\right\}$$

とおき，$X \subset \mathbb{R}^2$ を

$$X = \{(x,y) \mid x = \pm 1\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial R_n$$

とおく。点 $(1, 0)$ を含む，X のすべての閉かつ開集合の共通部分を求めよ。

10.17 S^n は連結である。

10.18 I と S^1 は同相でない。

10.19 $\mathbb{R}$ と $[0, \infty)$ は同相でない。

10.20 $n \geqq 2$ に対して，$\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}$ は同相でない。

10.21 $n \geqq 2$ に対して，S^n と S^1 は同相でない。

10.22 $n \geqq 2$ に対して，次を示せ。

(i) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}$ の座標は無理数を含む $\}$ は連結である。

(ii) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{x}$ のすべての座標は無理数 $\}$ は連結でない。

10.23 $\mathbb{R}^n$ の 2 点以上を含む連結集合は非可算である。

10.24 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ に含まれる連結集合全体の作る集合の濃度を比べよ。

10.25 $A \subset X$ で，X も A も連結とする。B を $X - A$ の閉かつ開集合とすると，$A \cup B$ は連結である。

10.26 $A \subset X$ で，X も A も連結とする。C を $X - A$ の連結成分とすると，$X - C$ は連結である。

10.27 $A \subset X,\ B \subset X$ を開集合とする。$A \cap B$ も $A \cup B$ も連結とすると，A も B も連結である。

10.28 前問は，開集合という仮定を外すと成り立たない。

10.29 $A \subset X,\ B \subset X$ を連結とする。$\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ とすると，$A \cup B$ も連結である。

10.30 X, Y は連結空間で，$A \subsetneqq X,\ B \subsetneqq Y$ とすると，$X \times Y - A \times B$ も連結である。

10.31 $\mathbb{R}^n$ の開集合の連結成分の個数は可算であるが，閉集合の場合はそうでない。

10.32 (R. H. Bing の可算連結空間) 問題 **8.24** の空間 X は連結である。

10.33 (M. Brown の可算連結空間) 問題 **8.25** の空間 X は連結である。