線形代数続論

川崎徹郎

1 複素数体 $\mathbb{C}$，複素平面（復習）

x, y が実数全体を動くときの複素数 $z = x + iy$ 全体の作る集合を $\mathbb{C}$ で表す。複素数に対して四則演算（加法，減法，乗法，除法）があり，和差積商が定まる。

$$
\begin{aligned}
(x+iy) \pm (u+iv) &= (x \pm u) + i(y \pm v) \\
(x+iy)(u+iv) &= (xu - yv) + i(xv + yu) \\
\frac{x+iy}{u+iv} &= \frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} = \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\,\frac{-xv+yu}{u^2+v^2}
\end{aligned}
$$

そして，交換法則，結合法則，分配法則が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&z + w = w + z,\ zw = wz \\
&(z+w) + w' = z + (w + w'),\ (zw)w' = z(ww') \\
&z(w + w') = zw + zw'
\end{aligned}
$$

さらに $0, 1$ を含むから，複素数全体 $\mathbb{C}$ は体である。**複素数体**という。

ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ の点 (x, y) と複素数 $z = x + iy$ を対応させることにより，複素数全体 $\mathbb{C}$ とユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ を同じものと見なすことができる。この平面を**複素平面**という。ときには，複素数 $z = x + iy$ を座標と考えて，z 平面ということもある。

複素数 z を実数 x, y により，$z = x + iy$ と表すとき，x を z の**実部**といい，$x = \operatorname{Re} z$ と表す。また，y を z の**虚部**といい，$y = \operatorname{Im} z$ と表す。

z 平面上の x 軸，y 軸をそれぞれ**実軸**，**虚軸**という。実軸は実数全体に，虚軸は純虚数全体に対応する。

複素平面において，複素数 z と原点との距離を z の**絶対値**といい，$|z|$ で表す。$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ である。$z = x + iy$ の長さとベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のノルムは同じであるから

$$|z + w| \leqq |z| + |w|$$

が成り立つ。

複素数 $z = x + iy$ に対して，$x - iy$ を z の**共役複素数**といい，$\bar{z}$ で表す。

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2},\ \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i},\ |z| = \sqrt{z\bar{z}} \\
&\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w},\ \overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w},\ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

$z \neq 0$ であるとき，ベクトル z が実軸の正の向きに対してつくる角を**偏角**といい，$\arg z$ で表す。$|z| = r$，$\arg z = \theta$ とすれば，z は**極形式**

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

で表される。$w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$ も極形式とすると，加法定理を用いて

$$
\begin{aligned}
zw &= rs(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\
&= rs\{(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi)\} \\
&= rs\{\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\}
\end{aligned}
$$

となる。したがって

$$
|zw| = |z||w|,\ \arg(zw) = \arg z + \arg w
$$
$$
\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},\ \arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w
$$

が成り立つ。また

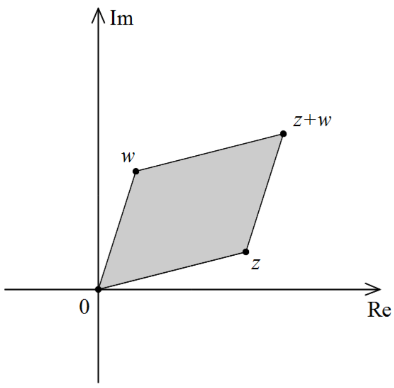
$$
|\bar{z}| = |z|,\ \arg\bar{z} = -\arg z
$$

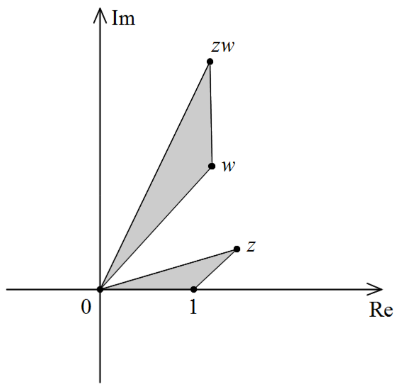
である。オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いると

$$
e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta}e^{i\phi},\quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}
$$

が成り立つことがわかる。

以上より，複素数の和と積の幾何的な意味を述べることができる。$0, z, z+w, w$ は平行四辺形の頂点である。三角形 $0, 1, z$ と三角形 $0, w, zw$ は相似である。





定理 （ド・モアブル） $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とするとき，次が成り立つ。

$$
z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)
$$

特に，複素数 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ には，つねに n 乗根がある。

$$
z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)
$$

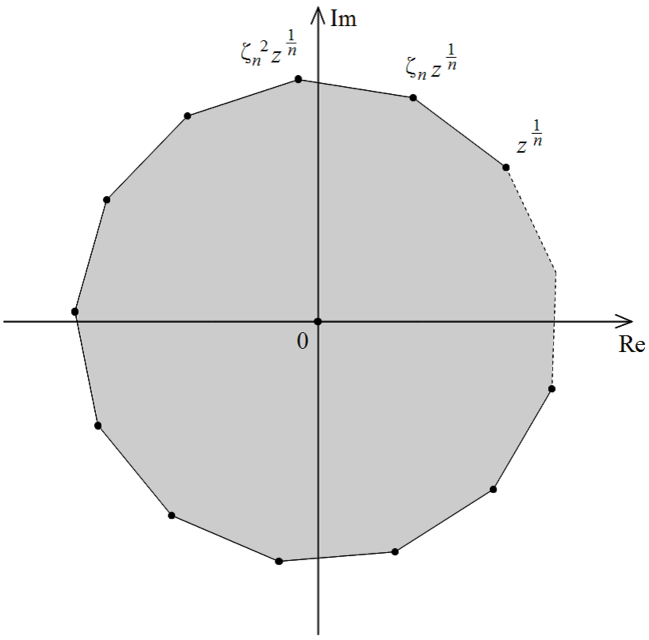
θ には 2π を加えてもよいから，$z^{\frac{1}{n}}$ の偏角には $\dfrac{2\pi}{n}$ だけの自由度がある。特に，1 の n 乗根のひとつを $\zeta_n = e^{\frac{2\pi}{n}}$ とおき，z の n 乗根のひとつを $z^{\frac{1}{n}}$ とおくと，$z \neq 1$ はちょうど n 個の n 乗根をもつ。

$$z^{\frac{1}{n}},\ \zeta_n z^{\frac{1}{n}},\ {\zeta_n}^2 z^{\frac{1}{n}},\ \ldots\ ,\ {\zeta_n}^{n-1} z^{\frac{1}{n}}$$

したがって，n 次式 $t^n - z$ は 1 次式の積に因数分解される。

$$t^n - z = \left(t - z^{\frac{1}{n}}\right)\left(t - \zeta_n z^{\frac{1}{n}}\right)\left(t - {\zeta_n}^2 z^{\frac{1}{n}}\right)\ldots\left(t - {\zeta_n}^{n-1} z^{\frac{1}{n}}\right)$$

z の n 乗根は複素平面上の 0 を中心とする正 n 角形の頂点になる。



問題 1.1 次の複素数を，実数 a, b により，$a + bi$ の形に表せ。

(1) $(2+3i)(3-i)$ (2) $\dfrac{2+i}{1-i}$ (3) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$

(4) $e^{-\pi i}$ (5) $e^{\frac{\pi}{4}i}$ (6) $\left(\sqrt{3}+i\right)^5$

問題 1.2 次の方程式のすべての解を求め，図示せよ。

(1) $z^3 = i$ (2) $z^5 = -1$ (3) $z^2 - z + 1 = 0$

(4) $z^2 + 2i = 0$ (5) $z^3 = -1 + i$

問題 1.3 $\alpha + \alpha^{-1} = 2\cos\theta$ のとき，$\alpha^n + \alpha^{-n}$ を θ で表せ。$\alpha + \alpha^{-1} = 2\sin\theta$ のときはどうか。

問題 1.4 $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = 1$ のとき，$\dfrac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$ は実数であることを示せ。

問題 1.5 α, β, γ が複素数のとき，$\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$ はそれぞれどのような点を表すか。

問題 1.6 z が単位円板を動くとき，$z+2$ の偏角はどのような範囲を動くか。

問題 1.7 公式

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

を示せ。それを利用して，三角関数の積を和になおす公式，たとえば

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2}\{\sin(x+y) - \sin(x-y)\}$$

を証明せよ。

問題 1.8 複素数体 $\mathbb{C}$ に順序を定めて順序体にすることはできない。

2　代数学の基本定理

$f(x)$ を複素数を係数とする n 次多項式とする。

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

$f(x)$ に複素数 z を代入すると，あらたな複素数 $w = f(z)$ が得られる。z に $w = f(z)$ を対応させる写像は複素平面から複素平面への写像である。この写像 $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の性質を調べてみよう。

z および w を実部，虚部に分けて $z = x + iy$，$w = u + iv$ と表すとき，u および v は x, y の 2 変数多項式である。これを $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ と表す。

例 2.1 $w = z^3$ ならば

$$(x + iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$$

であるから

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2,\ v(x, y) = 3x^2y - y^3$$

である。

問題 2.2 $w = z^4$ の $u(x, y)$, $v(x, y)$ を計算せよ。さらに，性質

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

を確かめよ。この性質（コーシー・リーマン方程式）は一般に成りたつ。$w = z^3$ についても確かめよ。

したがって，$u(x, y)$, $v(x, y)$ は x, y の関数として連続である。特に，絶対値 $|w| = \sqrt{u(x, y)^2 +\ v(x, y)^2}$ も連続である。また，$w = f(z)$ は平面 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像として連続である。これらより，次が成り立つ。

補題 2.3 絶対値 $|w| = |f(z)|$ には，定義域を閉円板 $\{z \mid |z| \leqq R\}$ に制限すると，最小値が存在する。

定義域を閉円板に制限しなくとも，絶対値 $|w| = |f(z)|$ には最小値があることがわかる。

補題 2.4 任意の $M > 0$ に対して，ある $N > 0$ が存在して，次の命題が成り立つ。

$$|z| > N \ \Rightarrow \ |w| = |f(z)| > M$$

証明 絶対値 $|w| = |f(z)|$ を下から評価するために 2 つに分ける。

$$|w| = \left|a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n\right| \geqq |a_0z^n| - \left|a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n\right|$$

ここで，$|z| \to \infty$ のとき

$$\frac{\left|a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n\right|}{|a_0z^n|} \leqq \frac{|a_1|}{|a_0z|} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{|a_0z^{n-1}|} + \frac{|a_n|}{|a_0z^n|} \to 0$$

であるから，十分大きな $N > 0$ に対して

$$|z| > N \ \Rightarrow\ \left|a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n\right| < \frac{1}{2}|a_0z^n|$$

とできる。そこで，$|z| > N$ とすれば

$$|w| \geqq |a_0z^n| - \left|a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n\right| > \frac{1}{2}|a_0z^n| > \frac{|a_0|}{2}N^n$$

となる。必要ならば，さらに大きな N を選べば，$|w| = |f(z)| > M$ が成り立つ。■

たとえば，$M = |a_0| = |f(0)|$ とおくとき，$|z| > N$ の範囲には，$|w| = |f(z)|$ の最小値は存在しない。したがって，閉円板 $\{z \mid |z| \leqq N\}$ 上の最小値は $\mathbb{C}$ 上の $|w| = |f(z)|$ の最小値である。

定理 2.5 (代数学の基本定理) 複素数を係数とする代数方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0, \quad n \geqq 1$$

は，少なくとも 1 つの解をもつ。

証明 絶対値 $|w| = |f(z)|$ には最小値が存在するから，その最小値が 0 であることを示せばよい。最小値が正であるとして，矛盾を導く。

$z = z_0$ で $|w| = |f(z)|$ が最小値 $|f(z_0)| > 0$ をとるとする。$f(z_0) \neq 0$ である。

ここで，多項式 $f(z)$ を $z = z_0$ のまわりでテイラー展開する。すなわち，$f(z)$ の z に $z + z_0$ を代入して，展開すると

$$\begin{aligned} f(z+z_0) &= a_0(z+z_0)^n + a_1(z+z_0)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(z+z_0) + a_n \\ &= b_0z^n + b_1z^{n-1} + \cdots + b_{n-1}z + b_n, \quad b_0 = a_0 \neq 0 \end{aligned}$$

を得る。ここで，$b_n = f(z_0)$ である。あらためて，上式の両辺の z に $z - z_0$ を代入して，昇冪の順に並びかえると

$$f(z) = f(z_0) + b_{n-1}(z-z_0) + \cdots + b_1(z-z_0)^{n-1} + b_0(z-z_0)^n$$

を得る。これが $f(z)$ の $z = z_0$ のまわりでのテイラー展開である。

この順で見て，$f(z_0)$ のあとの最初の 0 でない項に注目する（多くの場合，$k=1$ だが）。$b_{n-1}=b_{n-2}=\cdots=b_{n-k+1}=0$ で $b_{n-k}\neq 0$ とする。

$$f(z)=f(z_0)+b_{n-k}(z-z_0)^k+\cdots+b_1(z-z_0)^{n-1}+b_0(z-z_0)^n$$

今度はこの式の絶対値を上から評価する。

$$\begin{aligned}|w|&=|f(z)|\\&\leqq\left|f(z_0)+b_{n-k}(z-z_0)^k\right|+\left|b_{n-k-1}(z-z_0)^{k+1}+\cdots+b_0(z-z_0)^n\right|\end{aligned}$$

ここで，$z\to z_0$ のとき

$$\begin{aligned}&\frac{\left|b_{n-k-1}(z-z_0)^{k+1}+\cdots+b_0(z-z_0)^n\right|}{|b_{n-k}(z-z_0)^k|}\\&\leqq\frac{|b_{n-k-1}(z-z_0)|}{|b_{n-k}|}+\cdots+\frac{|b_0(z-z_0)^{n-k}|}{|b_{n-k}|}\to 0\end{aligned}$$

であるから，十分小さい $r>0$ を選べば，$|z-z_0|=r$ のとき

$$\left|b_{n-k-1}(z-z_0)^{k+1}+\cdots+b_0(z-z_0)^n\right|<\frac{1}{2}\left|b_{n-k}\right|r^k$$

が成りたつ。さらに，ここで $z-z_0=re^{i\theta}$ とおくと，θ を調整して

$$|f(z_0)+b_{n-k}r^ke^{ik\theta}|=|f(z_0)|-|b_{n-k}|\,r^k$$

とすることができる。これらを $|w|=|f(z)|$ の評価式に代入すると

$$|w|=|f(z)|<|f(z_0)|-\frac{1}{2}\left|b_{n-k}\right|r^k$$

を得るが，これは（$\frac{1}{2}\left|b_{n-k}\right|r^k$ は小さいけれども）$|f(z_0)|$ の最小性に矛盾する。■

系 2.6 自明でない多項式写像 $f(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は全射である。

系 2.7 複素数を係数とする n 次代数方程式は，重複を許してちょうど n 個の解をもつ。

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=a_0\,(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$$

問題 2.8 これらの系を定理から導け。

3 複素行列

今後，このコースでは複素ベクトル，複素行列を扱う。ベクトルといえば複素ベクトル，行列といえば複素行列を思い浮かべてほしい。

成分が複素数であるだけで，連立 1 次方程式の理論，掃き出し法，基本変形，階数などは何ら変わるところはない。

定理 3.1 (基本変形) 正則行列 P は基本行列いくつかの積で表すことができる。

定理 3.2 (階数) (m,n) 行列 A の階数を r とすると，m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q で

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となるものが存在する。

とはいえ，実際の計算は大変である。

問題 3.3 $\begin{pmatrix} 2+2i & 2+i & 1+i \\ 1+2i & 1+i & 1+i \\ 3-2i & 2-2i & 1-i \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

（答えは 2 である。第 $1,2$ 行を $1-i$ 倍し，第 3 行を $1+i$ 倍せよ。）

問題 3.4 $\begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ 1 & i & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

（答えは $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -2-4i & 3+i & 3+i \\ 3+i & -2-4i & 3+i \\ 3+i & 3+i & -2-4i \end{pmatrix}$ である。）

行列式の議論も本質的には変わらない。行列式の値は複素数である。たとえば，ある列の i 倍を他の列から引くような操作も許される。次のような問題は目新しいかもしれない。

問題 3.5 行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1+i & 0 & 1-i \\ 0 & i & 2 \\ 1+i & 2 & 2-i \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 0 & i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ i & 0 & i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & i & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & i & 0 & i \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & i & 0 \end{vmatrix}$

問題 3.6 n 次実正方行列 A, B に対して，次を示せ。

$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = |\det(A+iB)|^2$$

問題 3.7 次を示せ。

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \dots & x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{\{\zeta|\zeta^n=1\}} (x_0+\zeta x_1+\zeta^2 x_2+\cdots+\zeta^{n-1}x_{n-1})$$

問題 3.8 $\begin{vmatrix} x & i & 1 & -i \\ -i & x & i & 1 \\ 1 & -i & x & i \\ i & 1 & -i & x \end{vmatrix}$ を 1 次式の積に分解せよ。

ベクトル空間，線形写像の議論も，本質的には変わらない。すべて，係数は複素数，定数倍も複素数である。ただし，たとえば，問題を解く過程で，実ベクトルを複素ベクトル（の虚部が 0 のもの）と考えて，1 次独立性を調べたりすることがあるが，これも，実ベクトルとして 1 次独立ならば，複素数上も 1 次独立であることがわかる。

問題 3.9 このことを示せ。

定理 3.10 (線形写像の階数) U, V をベクトル空間，$T : U \to V$ を線形写像，r を T の階数とする。U の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ と V の基 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ をうまく選ぶと，T の表現行列を $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ とすることができる。

しかし，もう少し詳しい話になると，実数の範囲での議論と複素数まで含める議論との間に差が生じる。たとえば，対角化可能性を考えてみよう。

例 3.11 回転行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は実行列としては対角化可能でない。実際，実固有ベクトルは存在しない。しかし

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \mp i\sin\theta \\ \sin\theta \pm i\cos\theta \end{pmatrix} = e^{\mp i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

となり，複素行列としては対角化可能である。

これは別に不思議なことではない。固有多項式 $g_A(t) = \det(tE - A)$ は n 次式であるから，固有方程式は重複をこめて n 個の解（すなわち固有値）をもつ。今の場合

$$g_A(t) = \begin{vmatrix} t-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & t-\cos\theta \end{vmatrix} = t^2 - (2\cos\theta)t + 1$$

で，固有値は $\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} = e^{\pm i\theta}$ である。対応する固有ベクトルは，それぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ となる。

それならば，固有方程式は n 個の解をもつので，複素行列はいつでも対角化可能かというとそうではない。固有方程式に重解がある場合，すなわち固有値に重複がある場合には，うまくいかない場合がある。

例 3.12 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，$g_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 0 & t \end{vmatrix} = t^2$ となり，固有値は 0 だけである。固有ベクトルを求めると

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff y = 0$$

となるから，固有ベクトルは，1 次従属のものを除けば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ だけである。よって，固有ベクトルによる基底は存在しない。したがって，A は対角化不可能である。

次の章から，対角化可能性の必要十分条件を検討する。その後，対角化不可能行列も含めて，どのような議論が可能か考える。対角化不可能行列の標準形について考えよう。

後の議論の準備として，行列 $A = (a_{ij})$ に関する，いくつかの用語を準備しておく。

- トレース：$\mathrm{tr}(A)$（A は正方行列）$\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii}$

  $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B),\ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ 特に $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$

- 行列式：$\det(A)$（A は正方行列）$|A| = \det(A) =$ 定義省略

  $$\det(AB) = \det(A)\det(B) \text{ 特に } \det(P^{-1}AP) = \det(A)$$

- 転置行列：${}^tA$（A は任意）${}^tA$ の (i,j) 成分は a_{ji}

  $${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA,\ \mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A),\ \det({}^tA) = \det(A)$$

- 逆行列：A^{-1}（A は正則行列）$AA^{-1}=E,\ A^{-1}A=E$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},\ \det(A^{-1})=\det(A)^{-1}$$

- 複素共役行列：$\bar{A}$（A は任意）$\bar{A}$ の (i,j) 成分は $\bar{a}_{ij}$

$$\overline{(AB)}=\bar{A}\bar{B},\ \mathrm{tr}(\bar{A})=\overline{\mathrm{tr}(A)},\ \det(\bar{A})=\overline{\det(A)}$$

- 随伴行列：A^*（A は任意）$A^*={}^t\bar{A}$，A^* の (i,j) 成分は $\bar{a}_{ji}$

$$(AB)^*=B^*A^*,\ \mathrm{tr}(A^*)=\overline{\mathrm{tr}(A)},\ \det(A^*)=\overline{\det(A)}$$

問題 3.13 $A=\begin{pmatrix} 1+i & 3i \\ 7i & 2-5i \end{pmatrix}$ に対して，次を計算せよ。

(1) $\bar{A}$ (2) $(1+2i)A$ (3) ${}^tA$ (4) $\dfrac{1}{2}(A+\bar{A})$

(5) $\dfrac{1}{2}(A-\bar{A})$ (6) $-\dfrac{i}{2}(A-\bar{A})$

問題 3.14 $A=\begin{pmatrix} i & 2+3i & 1-i \\ 5 & 3-i & 7i \end{pmatrix}$ に対して，A^*A と AA^* を計算せよ。

4 行列の対角化

まず，固有値，固有方程式の復習からはじめる。

定義 n 次正方行列 A に対し，複素数 λ が A の**固有値**であるとは，$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ を満たす自明でないベクトル $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ が存在するとき。そのとき，$\boldsymbol{u}$ を固有値 λ に属する**固有ベクトル**という。

定義 λ を A の固有値とするとき

$$W(\lambda; A) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\}$$

は $\mathbb{C}^n$ の部分空間である。A の固有値 λ の**固有空間**という。

定義 n 次正方行列 A に対し，次の多項式 $g_A(t)$ を A の**固有多項式**という。

$$g_A(t) = \det(tE - A)$$

方程式 $g_A(t) = 0$ を A の**固有方程式**という。

注意 (固有多項式の定数項) 固有多項式の係数を

$$g_A(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_{n-1}t + c_n$$

と表すとき，定数項は

$$c_n = (-1)^n \det(A)$$

で与えられる。実際，上の定義式に $t = 0$ を代入すればよい。

定理 4.1 n 次正方行列 A に対し，固有値と固有方程式の解は一致する。

証明 次は同値である。

“ λ は A の固有値である ”

$\iff$ “ $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ を満たす自明でない $\boldsymbol{u}$ が存在する ”

$\iff$ “ $(\lambda E - A)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解をもつ ”

$\iff$ “ $\mathrm{rank}(\lambda E - A) < n$ ”

$\iff$ “ $\det(\lambda E - A) = 0$ ” ■

n 次正方行列 A に対し，固有方程式は n 次の代数方程式であるから，重複を許してちょうど n 個の解 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ をもち，各固有値 λ_i に対して，固有ベクトルは必ず存在する。

定理 4.2 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を A の相異なる固有値とし，それぞれに属する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_i$ とすると，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ は 1 次独立である。

証明 r に関する帰納法で証明する。

$r=1$ の場合は明らかである。

相異なる固有値に属する $r-1$ 個の固有ベクトルは 1 次独立だと仮定して，r 個の固有ベクトルの場合に証明する。$\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_r$ に 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_r\boldsymbol{u}_r=\boldsymbol{0}$$

があるとする。A をかけると

$$A(c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_r\boldsymbol{u}_r)=c_1A\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_rA\boldsymbol{u}_r=c_1\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_r\lambda_r\boldsymbol{u}_r=\boldsymbol{0}$$

となる。はじめの式の λ_r 倍を引くと，次式を得る。

$$c_1(\lambda_1-\lambda_r)\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_{r-1}(\lambda_{r-1}-\lambda_r)\boldsymbol{u}_{r-1}=\boldsymbol{0}$$

帰納法の仮定より，$\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_{r-1}$ は 1 次独立である。したがって，$c_1=\cdots=c_{r-1}=0$ となる。さらに，はじめの式に代入すれば，$c_r\boldsymbol{u}_r=\boldsymbol{0}$ を得る。よって，$c_r=0$ である。 ■

定理 4.3 n 次正方行列 A の固有値 λ の固有空間 $W(\lambda;A)$ の次元 r は，固有方程式の解 λ の重複度 m 以下（$r\leqq m$）である。

証明 $W(\lambda;A)$ の基 $\{\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_r\}$ を選び，それを含む $\mathbb{C}^n$ の基 $\{\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n\}$ を選ぶ。$\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n$ を並べた行列を P とおく。

$$P=(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n)$$

P は階数 n で正則である。今

$$AP=(A\boldsymbol{p}_1,\dots,A\boldsymbol{p}_n)=(\lambda\boldsymbol{p}_1,\dots,\lambda\boldsymbol{p}_r,*,\dots)$$

である。一方

$$(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn}\end{pmatrix}=(x_{11}\boldsymbol{p}_1+\cdots+x_{n1}\boldsymbol{p}_n,*,\dots)$$

であるから

$$(\lambda\boldsymbol{p}_1,\dots,\lambda\boldsymbol{p}_r,*,\dots)=(\boldsymbol{p}_1,\dots,\boldsymbol{p}_n)\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & O & \\ & \ddots & & * \\ O & & \lambda & \\ \hline & O & & * \end{array}\right)$$

と表される。ここで最後の λ は対角線に r 個並んでいる。よって

$$AP = P\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & O & \\ & \ddots & & * \\ O & & \lambda & \\ \hline & O & & * \end{array}\right)$$

が得られた。すなわち

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & O & \\ & \ddots & & * \\ O & & \lambda & \\ \hline & O & & * \end{array}\right)$$

となる。したがって，$P^{-1}AP$ の固有方程式の解 λ の重複度は $\geqq r$ である。相似な行列の固有方程式は等しいから，求める関係が示された。 ■

定義　n 次正方行列 A に対し

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる正則行列 P を求めることを**対角化**といい，そのような P が存在するとき，A は**対角化可能**であるという。

定理 4.4 (複素行列の対角化) n 次正方行列 A に関する次の 3 条件は同値である。

(a)　A は対角化可能である。

(b)　固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^n$ の基が存在する。

(c)　A のすべての固有値 λ に対して，固有空間 $W(\lambda; A)$ の次元 r は，固有方程式の解 λ の重複度 m と一致する。 ■

問題 4.5 定理を証明せよ。

系 4.6 固有多項式が重解をもたなければ対角化可能である。 ■

系 4.7 固有多項式を $f(t)$，その微分を $f'(t)$ とする。それらが互いに素ならば，対角化可能である。 ■

例題　対角化可能かどうか判定し，可能ならば対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

解答 (1) 固有多項式は

$$\det(tE - A) = \begin{vmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix} = t^3 - 3t - 2 = (t+1)^2(t-2)$$

である。よって，固有値は -1（重複度 2）と 2 である。

固有値 -1 については

$$\mathrm{rank}(-E - A) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

である。したがって，2 つの 1 次独立な固有ベクトルがある。よって，対角化可能である。固有ベクトルを求めると，たとえば

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。

固有値 2 については

$$\mathrm{rank}(2E - A) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

である。固有ベクトルは，たとえば

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。そこで

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

(2) 固有多項式は

$$\det(tE-A)=\begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ -2 & t+3 & -1 \\ -1 & 1 & t+1 \end{vmatrix} = t^3+4t^2+5t+2=(t+1)^2(t+2)$$

である。よって，固有値は -1（重複度 2）と -2 である。

固有値 -1 については

$$\operatorname{rank}(-E-A)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=2$$

である。1 次独立な固有ベクトルは 1 個だけであるから，対角化可能でない。

問題 4.8 対角化可能かどうか判定し，可能ならば対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問題 4.9 次の行列 A に対し，A^n を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$

問題 4.10 $a \neq b$ かつ $c \neq 0$ とする。次の行列を対角化可能かどうか判定し，可能ならば対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

問題 4.11 複素数の範囲で対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 7 & -5 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

問題 4.12 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ がそれぞれ固有値 i, 2, 3 の固有ベクトルであるような行列 A を求めよ。

5 行列の三角化

n 次正方行列 A に対し，その固有方程式の解を，重複を許して $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とする。すなわち

$$g_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$$

である。次の定理は，A が対角化できないときも，相似変形により上三角行列にできることを示している。

定理 5.1 (行列の三角化) n 次正則行列 P をうまく選ぶと，相似変形により，三角行列にすることができる。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

このとき，固有方程式の解の並び順 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ を任意に指定することができる。

証明 n に関する帰納法で証明する。

$n = 1$ のときは明らか。

$n - 1$ 次以下の行列に対して定理が成り立つと仮定して，n 次正方行列 A に対し，定理を証明する。$\boldsymbol{p}_1$ を固有値 λ_1 に属する固有ベクトルとし，$\boldsymbol{p}_1$ を含む基 $\{\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n\}$ を選ぶ。

$$P_1 = (\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n)$$

は正則行列である。すると

$$AP_1 = (A\boldsymbol{p}_1, \dots, A\boldsymbol{p}_n) = (\lambda_1 \boldsymbol{p}_1, *, \dots)$$

となる。一方

$$(\boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_n) \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = (x_{11}\boldsymbol{p}_1 + \cdots + x_{n1}\boldsymbol{p}_n, *, \dots)$$

であるから

$$AP_1 = P_1 \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

の形に表すことができる。したがって

$$
P_1{}^{-1}AP_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & & * & \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)
$$

となる。この行列は A と相似であるから同じ固有方程式をもつ。したがって，A_1 の固有方程式の解は $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ である。

ここで帰納法の仮定を適用する。A_1 は $n-1$ 次正方行列であるから，$n-1$ 次正則行列 P_2 を選んで

$$
P_2{}^{-1}A_1P_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

が成り立つようにできる。そこで

$$
P = P_1 \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)
$$

とおくと，P も正則行列で

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)^{-1} {P_1}^{-1}AP_1 \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & {P_2}^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & {P_2}^{-1}A_1 \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & ** \\ \hline 0 & \\ \vdots & {P_2}^{-1}A_1P_2 \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & & ** & \\ \hline 0 & \lambda_2 & & * \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & O & & \lambda_n \end{array}\right)$$

■

例題 $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を正則行列により三角化せよ。

解答 固有多項式は

$$\det(tE - A) = \begin{vmatrix} t & 4 & 2 \\ -1 & t-3 & -2 \\ 0 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-1)^2(t-2)$$

である。よって，固有値は 1（重複度 2）と 2 である。

固有値 1 の固有ベクトルを求めると

$$(E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

を解いて $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を得る。そこで

$$P_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

とおく。すると，計算の結果

$$P_1{}^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right), \quad P_1{}^{-1}AP_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

を得る。右下の部分 $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を求めて，$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。そこで

$$\begin{aligned} P = P_1 \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{P_2} \\ 0 & & \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

とおけば，三角化

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

を得る。

6　ケーリー・ハミルトンの定理と最小多項式

A を n 次正方行列とする。1 変数 x の多項式

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

に対し，$A^n, A^{n-1}, \ldots, A$ および n 次の単位行列 E の 1 次結合

$$f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE$$

を x に行列 A を**代入**して得られる行列という。

定理 6.1 多項式 $f(x), g(x)$ に対して，次が成り立つ。

(1) $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$, $(fg)(A) = f(A)g(A)$

(2) $f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$

(3) $f\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(A) & O \\ O & f(B) \end{pmatrix}$

証明　(1) それぞれの A^r の係数を比較すればよい。

(2) $(P^{-1}AP)^r = P^{-1}A^rP$ より明らかである。

(3) $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^r = \begin{pmatrix} A^r & O \\ O & B^r \end{pmatrix}$ より明らかである。 ■

定理 6.2 (ケーリー・ハミルトン) n 次正方行列 A の固有多項式を

$$g_A(t) = t^n + c_1t^{n-1} + \cdots + c_{n-1}t + c_n$$

とすると

$$g_A(A) = A^n + c_1A^{n-1} + \cdots + c_{n-1}A + c_nE = O$$

である。

証明　A を相似な行列 $P^{-1}AP$ に替えても固有多項式は変わらない。

$$\begin{aligned} g_{P^{-1}AP}(t) &= \det(tE - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(tE - A)P) \\ &= \det(tE - A) = g_A(t) \end{aligned}$$

したがって

$$g_{P^{-1}AP}(P^{-1}AP) = g_A(P^{-1}AP) = P^{-1}g_A(A)P$$

である。よって，A が三角行列の場合に証明すれば十分である。

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

そのとき

$$g_A(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_{n-1} t + c_n = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$$

である。したがって

$$g_A(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + \cdots + c_{n-1} A + c_n E = (A - \lambda_1 E) \cdots (A - \lambda_n E)$$

が成り立つ。ここで途中までの積について

- $(A - \lambda_1 E) \cdots (A - \lambda_k E)$ のはじめの k 列は $\mathbf{0}$ $\quad (k = 1, \ldots, n)$

を主張する。$k = 1$ のときは

$$\begin{aligned}(A - \lambda_1 E) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & \lambda_2 - \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n - \lambda_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

だからよい。$k - 1$ までよいとして，k の場合を示す。

$$\begin{aligned}&(A - \lambda_1 E) \cdots (A - \lambda_k E) \\ &\qquad = (A - \lambda_1 E) \cdots (A - \lambda_{k-1} E)(A - \lambda_k E) \\ &\qquad = (\mathbf{0}_1, \ldots, \mathbf{0}_{k-1}, *, \ldots) \begin{pmatrix} \ddots & & & & * \\ & \lambda_{k-1} - \lambda_k & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \lambda_{k+1} - \lambda_k & \\ O & & & & \ddots \end{pmatrix} \\ &\qquad = (\mathbf{0}_1, \ldots, \mathbf{0}_k, *, \ldots)\end{aligned}$$

$k = n$ の場合が定理の主張である。 ■

問題 6.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする。$n \geqq 3$ のとき

$$A^n = A^{n-2} + A^2 - E$$

を示せ。また，A^{100} を求めよ。

問題 6.4 $f(x)$ を多項式，A を n 次正方行列とする。A の固有値を，重複をこめて $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とするとき，$f(A)$ の固有値は，重複をこめて $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$ であることを示せ。

問題 6.5 n 次正方行列 A の固有多項式を $g_A(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_{n-1} t + c_n$ とするとき

$$c_1 = -\mathrm{tr}(A), \quad c_2 = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{tr}(A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)\right\}$$

を示せ。

問題 6.6 正則行列 A に対し，A^{-1} は A の多項式で表されることを示せ。

定義 正方行列 A に対して，A を代入すると零行列になるような多項式 $f(t)$ のうち，次数が最も小さく，最高次が係数が 1 であるようなものを A の**最小多項式**という。$p_A(t)$ で表す。

定理 6.7 正方行列 A に対して，最小多項式 $p_A(t)$ はすべての固有値を解にもち，固有多項式 $g_A(t)$ の約数である。

証明 λ を A の固有値とする。固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とすると，$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ であるから $cA^n\boldsymbol{u} = c\lambda^n\boldsymbol{u}$ である。したがって，多項式 $f(t)$ に対して，$f(A)\boldsymbol{u} = f(\lambda)\boldsymbol{u}$ が成り立つ。$f(t)$ が最小多項式 $p_A(t)$ のとき，この式は $f(\lambda)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ となり，$f(\lambda) = 0$ である。

固有多項式 $g_A(t)$ を $p_A(t)$ で割って，商を $q(t)$，余りを $r(t)$ とする。$r(t) = g_A(t) - p_A(t)q(t)$ が成り立つ。A を代入すると，$r(A) = O$ がわかる。$r(t)$ の次数は $p_A(t)$ より小さいから，$r(t) = 0$ すなわち，$g_A(t)$ は $p_A(t)$ で割り切れる。 ■

定理 6.8 対角化可能ならば，最小多項式は重解をもたない。

証明 A が対角化可能とする。A の相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とする。

$$f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_r)$$

に対して，$f(A) = O$ を見ればよい。実際，固有ベクトルからなる基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を選べば，$\boldsymbol{u}_i$ の固有値を λ_j として

$$\begin{aligned} f(A)\boldsymbol{u}_i &= (A - \lambda_1 E) \cdots (A - \lambda_r E)\boldsymbol{u}_i \\ &= (A - \lambda_1 E) \cdots (A - \lambda_{j-1} E)(A - \lambda_{j+1} E) \cdots (A - \lambda_r E)(A - \lambda_j E)\boldsymbol{u}_i \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

である。すべての i に対して，$f(A)\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$ であるから，$f(A) = O$ である。
■

この定理は逆も成り立つ。すなわち，最小多項式が重解をもたないことが，対角化可能性の必要十分条件である。その証明には，後に扱うジョルダン標準形の議論を利用する。

例題 最小多項式を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 13 & -7 \\ -5 & 19 & -10 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

解答 (1) 固有多項式 $g_A(t)$ は

$$\det(tE-A) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -1 \\ 1 & t-4 & -1 \\ -2 & 4 & t \end{vmatrix} = t^3-5t^2+8t-4 = (t-1)(t-2)^2$$

である。よって，最小多項式 $p_A(t)$ は $(t-1)(t-2)$ か $(t-1)(t-2)^2$ のいずれかである。

$$(A-E)(A-2E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = O$$

であるから

$$p_A(t) = (t-1)(t-2) = t^2-3t+2$$

(2) 固有多項式 $g_A(t)$ は

$$\det(tE-A) = \begin{vmatrix} t-1 & -3 & 2 \\ 3 & t-13 & 7 \\ 5 & -19 & t+10 \end{vmatrix} = t^3-4t^2+5t-2 = (t-1)^2(t-2)$$

である。よって，最小多項式 $p_A(t)$ は $(t-1)(t-2)$ か $(t-1)^2(t-2)$ のいずれかである。

$$(A-E)(A-2E) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -5 & 19 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 11 & -7 \\ -5 & 19 & -12 \end{pmatrix} \neq O$$

であるから

$$p_A(t) = (t-1)^2(t-2) = t^3-4t^2+5t-2 = g_A(t)$$

(3) 固有多項式 $g_A(t)$ は

$$\det(tE-A)=\begin{vmatrix} t-3 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -2 & -1 & t-1 \end{vmatrix}=t^3-6t^2+7t-1$$

で，固有値はすぐには求まらない。重解を調べよう。重解は微分との共通解であるから，微分を計算する。

$$g_A{}'(t)=3t^2-12t+7$$

である。$g_A(t)$ を $g_A{}'(t)$ で割ると

$$g_A(t)\div g_A{}'(t)=t-2 \text{ 余り } -\frac{1}{3}(10t-11)$$

となる。余りの解 $\frac{11}{10}$ は $g_A{}'(t)=0$ の解でないので，$g_A(t)$ と $g_A{}'(t)$ は互いに素である。したがって，固有多項式には重解はなく，最小多項式と一致する。

$$p_A(t)=g_A(t)=t^3-6t^2+7t-1$$

問題 6.9 最小多項式を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

7　べき零行列

対角化可能でない行列も存在する。典型的な例としてべき零行列がある。

定義　n 次正方行列 A が**べき零行列**であるとはある自然数 m に対して，$A^m = O$ となるとき。

例 7.1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ はべき零である。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = O$$

定理 7.2 n 次正方行列 A がべき零行列であるための必要十分条件は固有値が 0 だけであること。

証明　(1) “ 十分性 ”　固有値が 0 だけならば，固有多項式は t^n である。ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^n = O$ である。

(2) “ 必要性 ”　A が 0 以外の固有値 λ をもつとする。固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とすると，すべての m に対し，$A^m\boldsymbol{u} = \lambda^m\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ である。したがって，$A^m \neq O$ となる。すなわち，A はべき零でない。　■

べき零行列 A の最小多項式は固有多項式を割り切るから，t^m $(m \leqq n)$ となる。そのとき，$A^m = O$ かつ $A^{m-1} \neq O$ である。$0 \leqq k \leqq m$ に対し

$$V(k) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \mid A^k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$$

とおくと

$$\{\boldsymbol{0}\} = V(0) \subsetneqq V(1) \subset \cdots \subset V(m-1) \subsetneqq V(m) = \mathbb{C}^n$$

が成り立つ。そこで，$d_k = \dim V(k)$ とおく。

$$0 < d_1 \leqq \cdots \leqq d_{m-1} < d_m = n$$

である。

小さい順に基を選んで，それを含むように次の基を選ぶ。すると，$\mathbb{C}^n$ の基 $\{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n\}$ で

“$\{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{d_k}\}$ は $V(k)$ の基 ”

となるものを選ぶことができる。

まず，$e_1 = d_m - d_{m-1}$ とおき，最後に選んだ $\boldsymbol{q}_{d_{m-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_{d_m} = \boldsymbol{q}_n$ をあらためて，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{e_1}$ とおく。

主張 7.3 $A^k\boldsymbol{p}_1, \ldots, A^k\boldsymbol{p}_{e_1} \in V(m-k) - V(m-k-1)$ で，$V(m-k-1)$ の基と合わせても 1 次独立である。

証明 $\boldsymbol{p}_i \in V(m) - V(m-1)$ より，$A^k\boldsymbol{p}_i \in V(m-k) - V(m-k-1)$ である。1 次関係

$$c_1A^k\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{e_1}A^k\boldsymbol{p}_{e_1} + c'_1\boldsymbol{q}_1 + \cdots + c'_{d_{m-k-1}}\boldsymbol{q}_{d_{m-k-1}} = \boldsymbol{0}$$

とする。A^{m-k-1} を掛ければ

$$c_1A^{m-1}\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{e_1}A^{m-1}\boldsymbol{p}_{e_1} = \boldsymbol{0}$$

となる。よって

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{e_1}\boldsymbol{p}_{e_1} \in V(m-1)$$

$\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_n$ は 1 次独立で，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{e_1}$ はその一部 $\boldsymbol{q}_{d_{m-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{q}_{d_m}$ であり，$\{\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{d_{m-1}}\}$ は $V(m-1)$ の基であることから，$c_1 = \cdots = c_{e_1} = 0$ である。するとさらに $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{d_{m-k-1}}$ の 1 次独立性より $c'_1 = \cdots = c'_{d_{m-k-1}} = 0$ である。 ■

主張 7.4 $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{e_1}, A\boldsymbol{p}_1, \ldots, A\boldsymbol{p}_{e_1}, \ldots, A^{m-1}\boldsymbol{p}_1, \ldots, A^{m-1}\boldsymbol{p}_{e_1}$ は 1 次独立である。

証明 1 次関係があるとして，はじめの 0 でない係数の項が $V(m-k)$ に含まれるとする。そのとき，A^{m-k-1} を掛ければ矛盾を生ずる。 ■

$V(m-1)$ の基を選び直し，$\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{d_{m-2}}$ と $A\boldsymbol{p}_1, \ldots, A\boldsymbol{p}_{e_1}$ を含むものとする。$e_2 = d_{m-1} - d_{m-2}$ とおき，新たに付け加わった基を $\boldsymbol{p}_{e_1+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{e_2}$ とする。

主張 7.5 $A^k\boldsymbol{p}_1, \ldots, A^k\boldsymbol{p}_{e_1}, A^{k-1}\boldsymbol{p}_{e_1+1}, \ldots, A^{k-1}\boldsymbol{p}_{e_2} \in V(m-k) - V(m-k-1)$ で，$V(m-k-1)$ の基と合わせても 1 次独立である。

主張 7.6 次のベクトルは 1 次独立である

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{e_1}, A\boldsymbol{p}_1, \ldots, A\boldsymbol{p}_{e_1}, \ldots, A^{m-1}\boldsymbol{p}_1, \ldots, A^{m-1}\boldsymbol{p}_{e_1} \\ \boldsymbol{p}_{e_1+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{e_2}, A\boldsymbol{p}_{e_1+1}, \ldots, A\boldsymbol{p}_{e_2}, \ldots, A^{m-2}\boldsymbol{p}_{e_1+1}, \ldots, A^{m-2}\boldsymbol{p}_{e_2} \end{cases}$$

以下，これを繰り返す。すなわち，$e_{k+1} = d_{m-k} - d_{m-k-1}$ とおき，$V(m-k)$ の基を選び直し，$V(m-k-1)$ の基に

$$\begin{aligned} &A^k\boldsymbol{p}_1, \ldots, A^k\boldsymbol{p}_{e_1}, A^{k-1}\boldsymbol{p}_{e_1+1}, \ldots, A^{k-1}\boldsymbol{p}_{e_2}, \ldots, \\ &\qquad A\boldsymbol{p}_{e_{k-1}+1}, \ldots, A\boldsymbol{p}_{e_k}, \boldsymbol{p}_{e_k+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{e_{k+1}} \end{aligned}$$

を付け加えたものとすることができる。

これを $k \leqq m-1$ までやれば，$\mathbb{C}^n$ の基

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}_1, \dots, \boldsymbol{p}_{e_1}, A\boldsymbol{p}_1, \dots, A\boldsymbol{p}_{e_1}, \dots, A^{m-1}\boldsymbol{p}_1, \dots, A^{m-1}\boldsymbol{p}_{e_1} \\ \boldsymbol{p}_{e_1+1}, \dots, \boldsymbol{p}_{e_2}, A\boldsymbol{p}_{e_1+1}, \dots, A\boldsymbol{p}_{e_2}, \dots, A^{m-2}\boldsymbol{p}_{e_1+1}, \dots, A^{m-2}\boldsymbol{p}_{e_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_{e_{m-2}+1}, \dots, \boldsymbol{p}_{e_{m-1}}, A\boldsymbol{p}_{e_{m-2}+1}, \dots, A\boldsymbol{p}_{e_m-1} \\ \boldsymbol{p}_{e_{m-1}+1}, \dots, \boldsymbol{p}_{e_m} \end{cases}$$

が得られる。この基をさらに並び替えて

$$\begin{cases} A^{m-1}\boldsymbol{p}_1, \dots, A\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_1 \\ \vdots \\ A^{m-1}\boldsymbol{p}_{e_1}, \dots, A\boldsymbol{p}_{e_1}, \boldsymbol{p}_{e_1} \\ A^{m-2}\boldsymbol{p}_{e_1+1}, \dots, A\boldsymbol{p}_{e_1+1}, \boldsymbol{p}_{e_1+1} \\ \vdots \\ A^{m-2}\boldsymbol{p}_{e_2}, \dots, A\boldsymbol{p}_{e_2}, \boldsymbol{p}_{e_2} \\ \vdots \\ A\boldsymbol{p}_{e_{m-2}+1}, \boldsymbol{p}_{e_{m-2}+1} \\ \vdots \\ A\boldsymbol{p}_{e_{m-1}}, \boldsymbol{p}_{e_m-1} \\ \boldsymbol{p}_{e_{m-1}+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_{e_m} \end{cases}$$

とする。この順にベクトルを並べて得られる正則行列を P とおく。すると，$P^{-1}AP$ はこの基底に関する A の作用の表現行列になるが，それは，大きさ m のブロックが e_1 個，大きさ $m-1$ のブロックが $e_2 - e_1$ 個，...，大きさ 2 のブロックが $e_{m-1} - e_{m-2}$ 個，大きさ 1 のブロックが $e_m - e_{m-1}$ 個に分けられる。

すなわち，m 次正方行列 $J(0,m)$ を

$$J(0,m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{pmatrix}$$

とおき，それを l 個対角線上に並べたもの（行列の直和 $\oplus$）を $lJ(0,m)$ とおくとき，表現行列は

$$e_1J(0,m) \oplus (e_2-e_1)J(0,m-1) \oplus \cdots \oplus (e_{m-1}-e_{m-2})J(0,2) \oplus (e_m-e_{m-1})J(0,1)$$

と表すことができる。

もう少し，単純に表すと，次の定理が証明された。

定理 7.7 (べき零行列のジョルダン標準形) n 次べき零行列 A に対して，正則行列 P をうまく選ぶと，n の分割 $n = m_1 + \cdots + m_r$ が定まって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J(0, m_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J(0, m_r) \end{pmatrix}$$

とすることができる。

ここで，m を最大ブロックの大きさとすると，$A^m = O, A^{m-1} \neq O$ で

$$d_k = \dim\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \mid A^k\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\} \quad (k = 1, \ldots, m)$$

とおくと $d_1 < \cdots < d_m = n$ である。さらに

$$e_m = d_1, e_{m-1} = d_2 - d_1, \ldots, e_1 = d_m - d_{m-1}$$

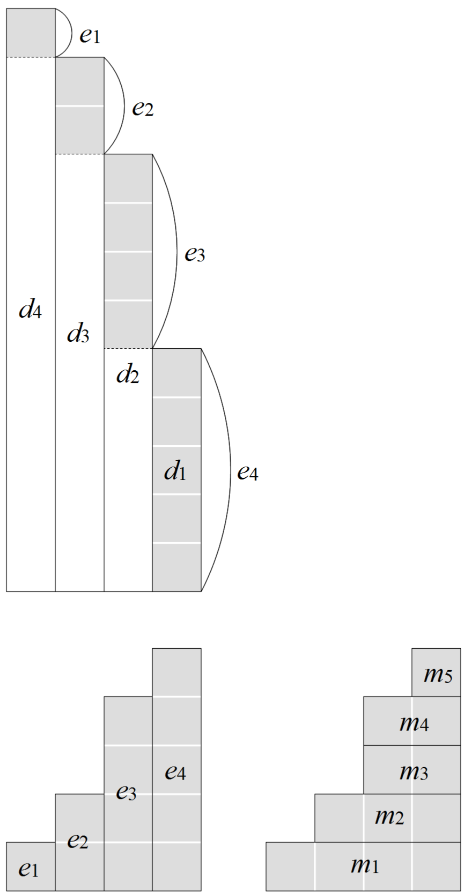
とおけば

$$e_1 \leqq e_2 \leqq \cdots \leqq e_m$$

が成りたつ。この増大列を長方形を積み上げた棒グラフで表し，横に切って得られる横棒グラフの長さが

$$\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$$

である。 ■



e_1
e_2
e_3
e_4
d_4
d_3
d_2
d_1
e_1
e_2
e_3
e_4
m_5
m_4
m_3
m_2
m_1

例題 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ はべき零行列であることを確かめ，ジョルダン標準形を求めよ。

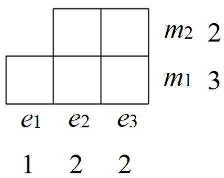
解答 計算すると

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

であるから，A はべき零で，最大ブロックの大きさは 3 である。
$\mathrm{rank}(A) = 3$, $\quad \mathrm{rank}(A^2) = 1$ より

$$d_1 = 5 - \mathrm{rank}(A) = 2, \quad d_2 = 5 - \mathrm{rank}(A^2) = 4, \quad d_3 = 5$$

$$e_1 = d_3 - d_2 = 5 - 4 = 1, \quad e_2 = d_2 - d_1 = 4 - 2 = 2, \quad e_3 = d_1 = 2$$



図より，$m_1 = 3$, $m_2 = 2$ である。したがって，ジョルダン標準形は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J(0,3) & O \\ O & J(0,2) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる。最後に P を求めよう。$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の 2 解を

$$\boldsymbol{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。それらと 1 次独立な $A^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の 2 解を

$$\boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_4$ と 1 次独立なベクトルを

$$\boldsymbol{q}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。最後の $\boldsymbol{q}_5$ に対して，$\boldsymbol{q}_5, A\boldsymbol{q}_5, A^2\boldsymbol{q}_5$ が逆順に P のはじめの 3 列になる。

$$\boldsymbol{p}_1 = A^2\boldsymbol{q}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = A\boldsymbol{q}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{q}_5$$

実際，$A\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{0}$，$A\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$，$A\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_2$ が成りたつ。次に，$\boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_4$ から，これらと 1 次独立なもの $\boldsymbol{q}_3$ を選ぶ。$\boldsymbol{q}_3, A\boldsymbol{q}_3$ が，逆順に P の残りの 2 列になる。

$$\boldsymbol{p}_4 = A\boldsymbol{q}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_5 = \boldsymbol{q}_3$$

確かに，$A\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{0}$，$A\boldsymbol{p}_5 = \boldsymbol{p}_4$ が成りたつ。したがって

$$\begin{aligned} P &= (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5) = (A^2\boldsymbol{q}_5, A\boldsymbol{q}_5, \boldsymbol{q}_5, A\boldsymbol{q}_3, \boldsymbol{q}_3) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

問題 7.8 べき零行列であることを確かめ，ジョルダン標準形と変換行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & i & i & i \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

問題 7.9 次の行列 A に対し，$\mathrm{rank}(A)$, $\mathrm{rank}(A^2)$, $\mathrm{rank}(A^3)$, $\mathrm{rank}(A^4)$ を求めよ。

(1) $J(0,3) \oplus J(0,2)$ (2) $J(0,4) \oplus J(0,1)$

(3) $J(0,2) \oplus J(0,2) \oplus J(0,1)$ (2) $J(0,3) \oplus J(0,1) \oplus J(0,1)$

8 準固有空間とジョルダン標準形

固有値 0 に対してべき零行列を考えたように，正方行列 A の固有値 λ に対しても，固有空間 $W(\lambda, A)$ を少し拡げた準固有空間というものを考える。

定義 n 次正方行列 A の固有値 λ に対して，その**準固有空間** $\widetilde{W}(\lambda, A)$ を次のように定める。

$$\widetilde{W}(\lambda, A) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda E)^m \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\ (\exists m)\}$$

定理 8.1 $\widetilde{W}(\lambda, A)$ は部分空間である。また，$\boldsymbol{u} \in \widetilde{W}(\lambda, A)$ ならば，$A\boldsymbol{u} \in \widetilde{W}(\lambda, A)$ である。

証明 $\boldsymbol{u} \in \widetilde{W}(\lambda, A)$ ならば，$c\boldsymbol{u} \in \widetilde{W}(\lambda, A)$ は明らかである。$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}' \in \widetilde{W}(\lambda, A)$ のとき，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}' \in \widetilde{W}(\lambda, A)$ を示そう。実際，ある m, m' に対して

$$(A - \lambda E)^m \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},\ (A - \lambda E)^{m'} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{0}$$

とすると

$$(A - \lambda E)^{m+m'}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') = \boldsymbol{0}$$

である。また，$(A - \lambda E)^m A = A(A - \lambda E)^m$ であるから，$A\boldsymbol{u} \in \widetilde{W}(\lambda, A)$ である。 ■

ここで，A の固有多項式 $g_A(t) = \det(tE - A)$ に対して，相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とする。解 λ_i の重複度を m_i とすると

$$g_A(t) = \det(tE - A) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

が成り立つ。

補題 8.2 $\dim(\widetilde{W}(\lambda_i, A)) \geqq m_i$ である。

証明 $\widetilde{W}(\lambda_i, A)$ が m_i 個の 1 次独立なベクトルを含むことを示す。A を三角化するとき，はじめの m_i 個の固有値を λ_i としておくと

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_i & & * & * \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ O & & & \end{array}\right) \quad \text{すなわち} \quad AP = P\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_i & & * & * \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ O & & & \end{array}\right)$$

とすることができる。これは，正則行列 P をつくる n 個の列ベクトルのうち，

はじめの m_i 個を $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_i}$ とおくと

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{p}_1 &= \lambda_i \boldsymbol{p}_1 \\ A\boldsymbol{p}_2 &= \lambda_i \boldsymbol{p}_2 + c_{21}\boldsymbol{p}_1 \\ A\boldsymbol{p}_3 &= \lambda_i \boldsymbol{p}_3 + c_{32}\boldsymbol{p}_2 + c_{31}\boldsymbol{p}_1 \\ &\vdots \\ A\boldsymbol{p}_{m_i} &= \lambda_i \boldsymbol{p}_{m_i} + \cdots + c_{m_i 1}\boldsymbol{p}_1 \end{aligned}$$

が成り立つことを示している。これより

$$(A - \lambda_i E)\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{0},\ (A - \lambda_i E)^2 \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0},\ \ldots,\ (A - \lambda_i E)^{m_i} \boldsymbol{p}_{m_i} = \boldsymbol{0}$$

がわかる。したがって，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_i} \in \widetilde{W}(\lambda_i, A)$ である。 ■

補題 8.3 $i \neq j$ とすると $\widetilde{W}(\lambda_i, A) \cap \widetilde{W}(\lambda_j, A) = \{\boldsymbol{0}\}$ である。

証明 $\boldsymbol{x} \in \widetilde{W}(\lambda_i, A) \cap \widetilde{W}(\lambda_j, A)$ として $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を示す。$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ として矛盾を導く。$\boldsymbol{x} \in \widetilde{W}(\lambda_j, A)$ より

$$(A - \lambda_j E)^{k-1}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \quad (A - \lambda_j E)^k \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

となる $k > 0$ が存在する。このとき，$\boldsymbol{y} = (A - \lambda_j E)^{k-1}\boldsymbol{x}$ は固有値 λ_j に属する自明でない固有ベクトルである。ここで，$\boldsymbol{x} \in \widetilde{W}(\lambda_i, A)$ より，$\boldsymbol{y} \in \widetilde{W}(\lambda_i, A)$ でもある。ところが

$$(A - \lambda_i E)\boldsymbol{y} = (\lambda_j - \lambda_i)\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$$

より，すべての $m > 0$ に関して，$(A - \lambda_i E)^m \boldsymbol{y} = (\lambda_j - \lambda_i)^m \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ が成り立つ。これは $\boldsymbol{y} \in \widetilde{W}(\lambda_i, A)$ に矛盾する。 ■

補題 8.4 $1 \leqq k \leqq r$ に対して，$\widetilde{W}(\lambda_1, A) + \cdots + \widetilde{W}(\lambda_k, A)$ は直和である。

証明 k に関する帰納法で証明する。前定理より $\widetilde{W}(\lambda_1, A) + \widetilde{W}(\lambda_2, A)$ は直和である。$\widetilde{W}(\lambda_1, A) + \cdots + \widetilde{W}(\lambda_{k-1}, A)$ は直和であると仮定して，$\widetilde{W}(\lambda_1, A) + \cdots + \widetilde{W}(\lambda_k, A)$ も直和であることを示す。

$$\left\{\widetilde{W}(\lambda_1, A) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_{k-1}, A)\right\} \cap \widetilde{W}(\lambda_k, A) = \{\boldsymbol{0}\}$$

を示せばよい。

$$\boldsymbol{x} \in \left\{\widetilde{W}(\lambda_1, A) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_{k-1}, A)\right\} \cap \widetilde{W}(\lambda_k, A)$$

として，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を示す。$\boldsymbol{x} \in \widetilde{W}(\lambda_k, A)$ より，$(A - \lambda_k E)^m \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $m > 0$ が存在する。$\boldsymbol{x} \in \left\{\widetilde{W}(\lambda_1, A) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_{k-1}, A)\right\}$ より

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_{k-1} \text{ ただし } \boldsymbol{x}_i \in \widetilde{W}(\lambda_i, A)\ (i = 1, \ldots, k-1)$$

と表すことができる。両辺に $(A-\lambda_k E)^m$ を掛けると

$$\mathbf{0} = (A-\lambda_k E)^m \boldsymbol{x}_1 + \cdots + (A-\lambda_k E)^m \boldsymbol{x}_{k-1}$$

であるが，$\boldsymbol{x}_i \in \widetilde{W}(\lambda_i, A)$ より，$(A-\lambda_k E)^m \boldsymbol{x}_i \in \widetilde{W}(\lambda_i, A)$ である。直和であることから，$(A-\lambda_k E)^m \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$ となることがわかる。したがって，$\boldsymbol{x}_i \in \widetilde{W}(\lambda_k, A)$ である。$\widetilde{W}(\lambda_i, A) \cap \widetilde{W}(\lambda_k, A) = \{\mathbf{0}\}$ より，$\boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$ である。各 i について正しいから，$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ である。 ■

特に，$k = r$ のときは，$\dim(\widetilde{W}(\lambda_i, A)) \geqq m_i$ より

$$\dim\left(\widetilde{W}(\lambda_1, A) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_r, A)\right) \geqq m_1 + \cdots + m_r = n$$

であるから

$$\mathbb{C}^n = \widetilde{W}(\lambda_1, A) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_r, A)$$

かつ

$$\dim(\widetilde{W}(\lambda_i, A)) = m_i \quad (i = 1, \ldots, r)$$

である。そして

$$A\widetilde{W}(\lambda_i, A)) \subset \widetilde{W}(\lambda_i, A)) \quad (i = 1, \ldots, r)$$

であった。

定理 8.5 $i = 1, \ldots, r$ に対し，$\dim(\widetilde{W}(\lambda_i, A)) = m_i$ で，$\mathbb{C}^n$ は r 個の準固有空間 $\widetilde{W}(\lambda_1, A), \ldots, \widetilde{W}(\lambda_r, A)$ の直和に分解する。

$$\mathbb{C}^n = \widetilde{W}(\lambda_1, A) \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}(\lambda_r, A)$$

すなわち，それぞれの基を選び，並べてみると $\mathbb{C}^n$ の基が得られる。

$$\boldsymbol{p}_1^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_1}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{p}_1^{(r)}, \ldots, \boldsymbol{p}_{m_r}^{(r)}$$

これらのベクトルを並べて得られる行列を P とおき，A の $\widetilde{W}(\lambda_i, A)$ 上の作用の表現行列を A_i とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_r \end{pmatrix}$$

と表される。 ■

ブロック A_i の標準形を求めよう。

定義　固有値 λ，大きさ m の**ジョルダン細胞** $J(\lambda,m)$ を

$$J(\lambda,m)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & O \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ O & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

で定める。

定理 8.6 m_i の分割 $m_i=l_1^{(i)}+\cdots+l_{r_i}^{(i)}$ が定まって，$\widetilde{W}(\lambda_i,A)$ の基 $\{\boldsymbol{p}_1^{(i)},\ldots,\boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)}\}$ をうまく選ぶとき，A の $\widetilde{W}(\lambda_i,A)$ 上の作用の表現行列 A_i を

$$A_i=\begin{pmatrix} J(\lambda_i,l_1^{(i)}) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J(\lambda_i,l_{r_i}^{(i)}) \end{pmatrix}$$

とすることができる。

証明　$A-\lambda_iE$ の $\widetilde{W}(\lambda_i,A)$ 上の作用はべき零である。したがって，$\widetilde{W}(\lambda_i,A)$ の基 $\{\boldsymbol{p}_1^{(i)},\ldots,\boldsymbol{p}_{m_i}^{(i)}\}$ をうまく選ぶとき，$A-\lambda_iE$ の表現行列をべき零ジョルダン標準形にすることができる。そのとき，はじめの $l_1^{(i)}$ 個の基底は

$$(A-\lambda_iE)\boldsymbol{p}_1^{(i)}=\boldsymbol{p}_2^{(i)},\ldots,(A-\lambda_iE)\boldsymbol{p}_{l_1^{(i)}-1}^{(i)}=\boldsymbol{p}_{l_1^{(i)}}^{(i)},(A-\lambda_iE)\boldsymbol{p}_{l_1^{(i)}}^{(i)}=\mathbf{0}$$

となっている。これを A の作用に書きかえると

$$A\boldsymbol{p}_1^{(i)}=\lambda_i\boldsymbol{p}_1^{(i)}+\boldsymbol{p}_2^{(i)},\ldots,A\boldsymbol{p}_{l_1^{(i)}-1}^{(i)}=\lambda_i\boldsymbol{p}_{l_1^{(i)}-1}^{(i)}+\boldsymbol{p}_{l_1^{(i)}}^{(i)},A\boldsymbol{p}_{l_1^{(i)}}^{(i)}=\lambda_i\boldsymbol{p}_{l_1^{(i)}}^{(i)}$$

となるが，これは固有値 λ_i のジョルダン細胞で表現される。　■

注意　上の定理において，m_i の分割 $m_i=l_1^{(i)}+\cdots+l_{r_i}^{(i)}$ は次のように定まる。たとえば，$m_i=5$ で，$n-\mathrm{rank}((A-\lambda_iE)^k)$ が $m_i=5$ になるまで計算して

$$\begin{aligned} d_1&=n-\mathrm{rank}(A-\lambda_iE)=2\\ d_2&=n-\mathrm{rank}((A-\lambda_iE)^2)=4\\ d_3&=n-\mathrm{rank}((A-\lambda_iE)^3)=5=m_i \end{aligned}$$

とすると，$d_1=2$ が固有値 λ_i のジョルダン細胞の数 2 を表し，d_1，d_2，d_3 の長さ 3 が最大のジョルダン細胞の大きさを表している。より詳しく計算するには，前と同様に

$$e_1=d_3-d_2=5-4=1,\quad e_2=d_2-d_1=4-2=2,\quad e_3=d_1=2$$

として，e_1，e_2，e_3 を長方形を積み上げた棒グラフで表すと，横に切って得られる横棒グラフの長さが $\{l_1^{(i)},\ldots,l_{r_i}^{(i)}\}$ となる。今の場合では，$l_1^{(i)}=3$，$l_2^{(i)}=2$ である。

ここで，少し記号の使い方が変わるが，上の定理を次のように述べることもできる。

定理 8.7 n 次正方行列 A に対して，正則行列 P をうまく選ぶと，n の分割 $n = m_1 + \cdots + m_r$ と固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ が定まって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, m_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J(\lambda_r, m_r) \end{pmatrix}$$

とすることができる。さらに，このとき，A の固有多項式 $g_A(t)$ は

$$g_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

で与えられる。ただし，このとき，$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ はすべて異なるとは限らない。ジョルダン細胞は順序を除いて一意的である。 ■

行列 A のジョルダン標準形の求め方

(1) まず A のすべての固有値と重複度を求める。

$$g_A(t) = \det(tE - A) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

m_i は準固有空間 $\widetilde{W}(\lambda_i, A)$ の次元である。m_i は固有値 λ_i のジョルダン細胞たちの大きさの和である。

(2) 各固有値 λ_i に対して，同じ議論をする。記号の簡単のために，固有値 λ，重複度 m と記す。$k = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned} d_k &= \dim(\{\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)^k \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}) \\ &= n - \mathrm{rank}((A - \lambda E)^k) \end{aligned}$$

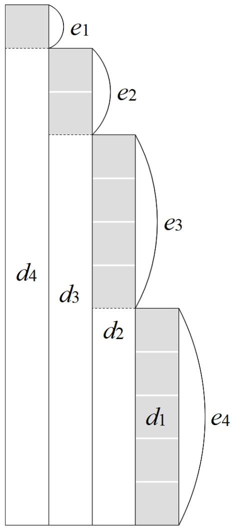
を $d_k = m$ となるまで，計算する。そのときの k を l とする。

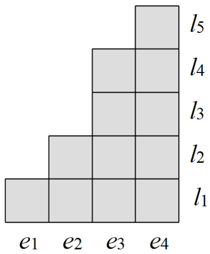
$$0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_l = m$$

l は固有値 λ のジョルダン細胞の最大の大きさである。d_1 は固有値 λ の 1 次独立な固有ベクトルの個数で，固有値 λ のジョルダン細胞の個数でもある。

$m \leqq 3$ ならば，ここまでで固有値 λ のジョルダン細胞は定まってしまう。

(3) それでも定まらない場合は，差 $d_k - d_{k-1}$ を小さい順に $e_1 \leqq \cdots \leqq e_l$ と並べ，長方形を積み上げた棒グラフに表し，横に切って，横棒の長さを大きい順に $l_1 \geqq l_2 \geqq \ldots$ とすれば，それが固有値 λ のジョルダン細胞の大きさと個数を与える。





例題　ジョルダン標準形を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} -2 & -7 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$　$\bigl($固有多項式 $t^2(t-1)^2\bigr)$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　$\bigl($固有多項式 $(t-1)^4\bigr)$

解答　(1) 固有値は $0, 1$ 重複度はそれぞれ $2, 2$ である。A と $A-E$ の階数を求めよう。

$$A=\begin{pmatrix}-2&-7&2&-5\\1&2&0&1\\3&7&-1&5\\1&3&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-3&2&-3\\0&1&-1&2\\0&1&-1&2\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&-1&2\\0&0&-1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank}\,A=3$ である。ゆえに，固有値 0 の固有空間は 1 次元で，ジョルダン細胞は 1 つである。したがって，固有値 0 のジョルダン細胞は $J(0,2)$ である。

$$A-E=\begin{pmatrix}-3&-7&2&-5\\1&1&0&1\\3&7&-2&5\\1&3&-1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-3&-7&2&-5\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\1&3&-1&2\end{pmatrix}$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-4&2&-2\\0&2&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&2&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank}\,(A-E)=2$ である。ゆえに，固有値 1 の固有空間は 2 次元で，ジョルダン細胞は 2 つである。したがって，固有値 1 のジョルダン細胞は $J(1,1)\oplus J(1,1)$ である。

変換行列 $P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)$ を求めよう。1 次独立のベクトルで

$$A\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{0},\quad A\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1,\quad A\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{p}_3,\quad A\boldsymbol{p}_4=\boldsymbol{p}_4$$

となるものを見つければよい。$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解くと

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\ \sim\ \begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&-1&2\\0&0&-1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\quad\Longleftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{r}x+2y+w=0\\y-z+2w=0\\-z+3w=0\end{array}\right.$$

となる。ここで，たとえば，$w=1$ とおくと，$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-3\\1\\3\\1\end{pmatrix}$ を得る。

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1$ を解くと

$$(A|\boldsymbol{p}_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -7 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

であるから

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_1 \iff \begin{cases} x + 2y + w = 1 \\ y - z + 2w = 0 \\ -z + 3w = -1 \end{cases}$$

となる。ここで，たとえば，$w = 0$ とおくと，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る。

$(A - E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くと

$$(A - E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + w = 0 \\ 2y - z + w = 0 \end{cases}$$

となる，ここで，たとえば，$z = 2, w = 0$ とおくと，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る。また，$z = 0, w = 2$ とおくと，$\boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ を得る。

したがって，たとえば

$$P = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

でよい。

(2) 固有値は 1 だけで，重複度は 4 である。$A-E$ の階数を求めよう。

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&0\\-1&0&0&1\\2&1&1&-1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank}\,(A-E)=2$ である。ゆえに，固有値 1 の固有空間は 2 次元で，ジョルダン細胞は 2 つである。したがって，ジョルダン細胞は $J(1,3)\oplus J(1,1)$ か $J(1,2)\oplus J(1,2)$ のいずれかである。ここで $(A-E)^2$ を計算する。

$$(A-E)^2=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&0\\-1&0&0&1\\2&1&1&-1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&-1&0\\-1&0&0&1\\2&1&1&-1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}=O$$

したがって，$(A-E)^2=O$ であるから，大きいほうのジョルダン細胞の大きさは 2 で，ジョルダン細胞は $J(1,2)\oplus J(1,2)$ である。

変換行列 $P=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)$ を求めよう。1 次独立のベクトルで

$$(A-E)\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{0},\quad (A-E)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1,\quad (A-E)\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{0},\quad (A-E)\boldsymbol{p}_4=\boldsymbol{p}_3$$

となるものを見つければよい。$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を解くと

$$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\iff\begin{cases}x+y+z=0\\y+z+w=0\end{cases}$$

となる。ここで，たとえば，$z=1,w=0$ とおくと，$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ を得る。また，$z=0,w=1$ とおくと，$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ を得る。

$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_1$ を解くと

$$(A-E|\boldsymbol{p}_1)=\left(\begin{array}{cccc|c}-1&-1&-1&0&0\\-1&0&0&1&-1\\2&1&1&-1&1\\-1&-1&-1&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

であるから

$$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_1 \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z+w=-1 \end{cases}$$

となる。ここで，たとえば，$z=w=0$ とおくと，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る。

$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_3$ を解くと

$$(A{-}E|\boldsymbol{p}_3)=\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

であるから

$$(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_3 \iff \begin{cases} x+y+z=-1 \\ y+z+w=-2 \end{cases}$$

となる。ここで，たとえば，$z=w=0$ とおくと，$\boldsymbol{p}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る。

したがって，たとえば

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

でよい。

問題 8.8 ジョルダン標準形を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\big($固有多項式 $(t-1)^3(t-2)\big)$

(4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\bigl($固有多項式 $(t-1)^4\bigr)$

問題 8.9 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ を求めよ。

問題 8.10 $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix}^n$ を求めよ。

問題 8.11 $\begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ のジョルダン標準形を求めよ。

問題 8.12 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & & & O \\ 1 & \lambda & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda & 0 \\ O & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ のジョルダン標準形を求めよ。

問題 8.13 $\lambda \neq 0$ とするとき，$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & O \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ O & & & & \lambda \end{pmatrix}^{-1}$ を求めよ。

問題 8.14 A を正方行列とするとき，A と ${}^tA$ は相似である，すなわち，${}^tA = P^{-1}AP$ となる正則行列 P が存在することを示せ。

8.1 付録：行列の指数関数 e^A

e^x のべき級数展開

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}x^p$$

に対して，n 次正方行列 A のべき級数

$$e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}A^p = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \ldots$$

を考える。その有限和

$$\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}A^p = E + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots + \frac{1}{N!}A^N$$

の各 (i,j) 成分は $n \to \infty$ のとき収束するだろうか。ここで，右辺は行列の多項式であるから，意味は明解であろう。

例 8.15 A を対角行列

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とすると

$$A^p = \begin{pmatrix} {\lambda_1}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {\lambda_n}^p \end{pmatrix}$$

であるから

$$\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!}A^p = \begin{pmatrix} \sum^N \frac{1}{p!}{\lambda_1}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum^N \frac{1}{p!}{\lambda_2}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum^N \frac{1}{p!}{\lambda_n}^p \end{pmatrix}$$

が成り立ち，$N \to \infty$ のとき，右辺は常に収束し

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

である。

例 8.16 A が対角行列 B, C により $A = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}$ と区分けされると，$A^p = \begin{pmatrix} B^p & O \\ O & C^p \end{pmatrix}$ であるから

$$\sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} A^p = \begin{pmatrix} \sum^N \frac{1}{p!} B^p & O \\ O & \sum^N \frac{1}{p!} C^p \end{pmatrix}$$

と表すことができる。したがって，e^B, e^C がともに収束すれば，e^A は収束する。

例 8.17 A をジョルダン細胞 $J(\lambda, n)$ とする。対応するべき零行列を $N = J(0, n)$ とすると

$$A = J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + N$$

である。

そのとき，$N^n = O$ に注意して

$$
\begin{aligned}
A^p &= (\lambda E + N)^p = \sum_{q=0}^{p} {}_p\mathrm{C}_q \lambda^{p-q} N^q = \sum_{q=0}^{\min\{p,n\}} {}_p\mathrm{C}_q \lambda^{p-q} N^q \\
&= \lambda^p E + p\lambda^{p-1} N + \frac{p(p-1)}{2}\lambda^{p-2} N^2 + \dots \\
&\quad + \frac{p(p-1)\dots(p-n+2)}{(n-1)!}\lambda^{p-n+1} N^{n-1} \\
&= \lambda^p \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + p\lambda^{p-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{p(p-1)}{2}\lambda^{p-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} + \cdots \\
&\quad + \frac{p(p-1)\dots(p-n+2)}{(n-1)!}\lambda^{p-n+1} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。$\dfrac{1}{p!}$ を掛けて和をとると

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{M} \frac{1}{p!} A^p &= \left(\sum_{p=0}^{M} \frac{1}{p!}\lambda^p \right) E + \left(\sum_{p=1}^{M} \frac{1}{(p-1)!}\lambda^{p-1} \right) N \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\sum_{p=2}^{M} \frac{1}{(p-2)!}\lambda^{p-2} \right) N^2 + \dots \\
&\quad + \frac{1}{(n-1)!} \left(\sum_{p=n-1}^{M} \frac{1}{(p-n+1)!}\lambda^{p-n+1} \right) N^{n-1}
\end{aligned}
$$

である。ここで，$M \to \infty$ のとき，右辺の（）の中はすべて e^{λ} に収束する。

したがって，e^A は収束し

$$e^A = e^\lambda\left(E + N + \frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{6}N^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}N^{n-1}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda & \frac{1}{2}e^\lambda & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}e^\lambda \\ & e^\lambda & e^\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & e^\lambda & \ddots & \frac{1}{2}e^\lambda \\ 0 & & & \ddots & e^\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & & e^\lambda \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

定理 8.18 すべての n 次正方行列 A に対し，e^A は収束する。

証明 A のジョルダン標準形を $J = J(\lambda_1, m_1) \oplus J(\lambda_2, m_2) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_r, m_r)$ とすると，正則行列 P で $J = P^{-1}AP$ となるものがある。前例と前々例より，e^J は収束して

$$e^J = e^{J(\lambda_1, m_1)} \oplus e^{J(\lambda_2, m_2)} \oplus \cdots \oplus e^{J(\lambda_r, m_r)}$$

が成り立つ。したがって，有限和 $\sum_{p=0}^{M} \frac{1}{p!}J^p$ の各成分は e^J の各成分に収束する。また，$A = PJP^{-1}$ より，$A^p = PJ^pP^{-1}$ が成り立ち，それらの和をとれば

$$\sum_{p=0}^{M} \frac{1}{p!}A^p = \sum_{p=0}^{M} \frac{1}{p!}PJ^pP^{-1} = P\left(\sum_{p=0}^{M} \frac{1}{p!}J^p\right)P^{-1}$$

が成り立つ。ここで，右辺の各成分は，$\sum_{p=0}^{M} \frac{1}{p!}J^p$ の成分と P の成分と P^{-1} の成分の積たちの和である。そして，$\sum_{p=0}^{M} \frac{1}{p!}J^p$ の (i,j) 成分は e^J の (i,j) 成分に収束するから，左辺の (i,j) 成分は Pe^JP^{-1} の (i,j) 成分に収束する。■

実数 t をパラメーターとし，A の代わりに tA を代入した関数行列 e^{tA} を考える。上記考察より，e^{tJ} の各成分が t の実解析関数であることから，e^{tA} の各成分も実解析的で，したがって，微分可能であることがわかる。次の定理が成り立つ。

定理 8.19 $\left(e^{tA}\right)' = A\,e^{tA}$

証明 実解析的であるから，e^{tA} をテイラー展開して，項別微分することができる。したがって

$$\left(e^{tA}\right)' = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}A^p\right)' = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p\,t^{p-1}}{p!}A^p = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}A^p = A\,e^{tA}$$

である。■

一般には，指数定理 $e^{A+B} = e^A\, e^B$ は成り立たないが，交換可能 $AB = BA$ のときは成り立つ。

補題 8.20 (二項定理) $AB = BA$ ならば $(A+B)^n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_p A^p B^{n-p}$

証明 n に関する帰納法を用いる。数の場合と同じである。
$n = 1$ の場合は明らか。
n について成り立つとし，$n+1$ の場合を示す。

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B)(A+B)^n = (A+B)\left(\sum_{p=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_p A^p B^{n-p}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_p A^{p+1} B^{n-p} + \sum_{p=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_p BA^p B^{n-p} \\
&= \sum_{p=1}^{n+1} {}_n\mathrm{C}_{p-1} A^p B^{n-p+1} + \sum_{p=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_p A^p B^{n-p+1} \\
&= A^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left({}_n\mathrm{C}_{p-1} + {}_n\mathrm{C}_p\right) A^p B^{n-p+1} + B^{n+1} \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_p A^p B^{n+1-p} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

定理 8.21 (指数定理) $AB = BA$ ならば $e^{A+B} = e^A\, e^B$

証明 2 つの実解析関数 $e^{t(A+B)}$ と $e^{tA}\, e^{tB}$ を比べると

$$\begin{aligned}
e^{t(A+B)} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}(A+B)^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}\left(\sum_{q=0}^{p} {}_p\mathrm{C}_q A^q B^{p-q}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!}\left(\sum_{q=0}^{p} \frac{p!}{q!(p-q)!} A^q B^{p-q}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} \frac{t^p}{q!(p-q)!} A^q B^{p-q} \\
e^{tA}\, e^{tB} &= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} A^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^q}{q!} B^q\right) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{t^p\, t^q}{p!q!} A^p B^q \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} \frac{t^n}{p!q!} A^p B^q = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{t^n}{p!(n-p)!} A^p B^{n-p}
\end{aligned}$$

となり，同じ式で表される。■

9　エルミート計量線形空間

複素ベクトル空間に内積を考えるとき，実ベクトル空間と大きく異なってくる。

定義　複素ベクトル空間 V 上の**エルミート内積**とは，ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して，複素数 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を対応させる関数で，次の条件を満たすものである。

(1) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}), \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}')$

(2) $(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \quad (\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}) = \bar{c}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

(3) $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \overline{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}$

(4) $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$

エルミート内積が与えられた複素ベクトル空間を**エルミート計量線形空間**という。

例 9.1　$\mathbb{C}^n$ 上で，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対して，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{b}} = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_n \end{pmatrix} = a_1\bar{b}_1 + \cdots + a_n\bar{b}_n$$

と定めると，これはエルミート内積である。$\mathbb{C}^n$ の**標準エルミート内積**という。

定義　V をエルミート計量線形空間とする。ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して，**ノルム** $\|\boldsymbol{u}\|$ を次で定める。

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$$

例 9.2　$\mathbb{C}^n$ 上では，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ に対して，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}$ である。

定理 9.3 (シュヴァルツの不等式と三角不等式)　エルミート計量線形空間 V 上のノルムに関して，次が成り立つ。

(1) $\|c\boldsymbol{u}\| = |c|\,\|\boldsymbol{u}\|$

(2) $|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leqq \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|$

(3) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| \leqq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$

証明 (1) 両辺を 2 乗して示せばよい。

$$\|c\boldsymbol{u}\|^2 = (c\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{u}) = c\bar{c}\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = |c|^2\,\|\boldsymbol{u}\|^2$$

(2) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ ならば明らかであるから，$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ と仮定し，実数 t,θ に対して，$\|t\boldsymbol{u}+e^{i\theta}\boldsymbol{v}\|^2 \geqq 0$ を計算すると

$$\begin{aligned}\|t\boldsymbol{u}+e^{i\theta}\boldsymbol{v}\|^2 &= (t\boldsymbol{u}+e^{i\theta}\boldsymbol{v}, t\boldsymbol{u}+e^{i\theta}\boldsymbol{v})\\ &= (t\boldsymbol{u},t\boldsymbol{u}) + (e^{i\theta}\boldsymbol{v}, e^{i\theta}\boldsymbol{v}) + (t\boldsymbol{u}, e^{i\theta}\boldsymbol{v}) + (e^{i\theta}\boldsymbol{v}, t\boldsymbol{u})\\ &= t^2\,\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(t\boldsymbol{u}, e^{i\theta}\boldsymbol{v})\\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2\,t^2 + 2\,\mathrm{Re}\{e^{-i\theta}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\}\,t + \|\boldsymbol{v}\|^2 \geqq 0\end{aligned}$$

最後の式は t の 2 次式で，つねに $\geqq 0$ である。したがって，その判別式は $\leqq 0$ である。よって，すべての θ に対して

$$\mathrm{Re}\{e^{-i\theta}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\} \leqq \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2$$

が成り立つ。ここで $\theta=\arg(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ とおけば，$\mathrm{Re}\{e^{-i\theta}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\} = |(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|$ となり，求める不等式が得られた。

(3) 両辺を 2 乗して差を計算する。

$$\begin{aligned}&(\|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\|)^2 - \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2\\ &\qquad= \|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2+2\,\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\| - (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\\ &\qquad\geqq \|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2+2\,|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| - (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\\ &\qquad= \|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{v}\|^2+2\,|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\\ &\qquad= 2\,\{|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})| - \mathrm{Re}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\} \geqq 0\end{aligned}$$

■

エルミート計量線形空間 V の 2 つのベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ が**直交**するとは $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ のときである。$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$ と表す。

定義 V をエルミート計量線形空間とする。V の基 $\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n\}$ が，**正規直交基**であるとは

$$(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$$

を満たすとき。

定理 9.4 (シュミットの正規直交化) エルミート計量線形空間 V の任意の基 $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ に対して，正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n\}$ で

$$\langle\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r\rangle_{\mathbb{C}} = \langle\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_r\rangle_{\mathbb{C}} \quad (r=1,\ldots,n)$$

となるものが存在する。

証明　まず
$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\,\boldsymbol{v}_1$$
とおけば，$\|\boldsymbol{u}_1\| = 1,\ \boldsymbol{u}_1 \in \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle_{\mathbb{C}}$ である。次に
$$\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$$
とおけば，$\boldsymbol{v}_2' \neq \boldsymbol{0},\ (\boldsymbol{v}_2', \boldsymbol{u}_1) = 0,\ \boldsymbol{v}_2' \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle_{\mathbb{C}}$ である。そこで
$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_2'\|}\,\boldsymbol{v}_2'$$
とおけば，$\|\boldsymbol{u}_2\| = 1,\ (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1) = 0,\ \boldsymbol{u}_2 \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle_{\mathbb{C}}$ である。

ここで，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ が求まったと仮定するとき，
$$\boldsymbol{v}_{r+1}' = \boldsymbol{v}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{u}_i$$
とおけば，$\boldsymbol{v}_{r+1}' \neq \boldsymbol{0},\ (\boldsymbol{v}_{r+1}', \boldsymbol{u}_1) = 0, \ldots,\ (\boldsymbol{v}_{r+1}', \boldsymbol{u}_r) = 0, \boldsymbol{v}_{r+1}' \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{r+1} \rangle_{\mathbb{C}}$ である。そこで
$$\boldsymbol{u}_{r+1} = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_{r+1}'\|}\,\boldsymbol{v}_{r+1}'$$
とおけば，$\|\boldsymbol{u}_{r+1}\| = 1,\ (\boldsymbol{u}_{r+1}, \boldsymbol{u}_1) = 0, \ldots,\ (\boldsymbol{u}_{r+1}, \boldsymbol{u}_r) = 0, \boldsymbol{u}_{r+1} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{r+1} \rangle_{\mathbb{C}}$ である。これを $r + 1 = n$ まで繰り返せばよい。　■

問題 9.5 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とするとき，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ を正規直交化せよ。

定理 9.6 V をエルミート計量線形空間，$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ をその正規直交基とする。$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対し
$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n, \quad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n$$
とすると
$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1\bar{b}_1 + \cdots + a_n\bar{b}_n$$
である。　■

定理 9.7 (随伴行列) (m, n) 行列 A と $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^m$ に対して
$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{u})$$
が成り立つ。

証明 左辺は $\mathbb{C}^m$ の内積である。標準内積の定義 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{b}}$ を用いて変形する。

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})\bar{\boldsymbol{v}} = {}^t\boldsymbol{u}\,{}^tA\bar{\boldsymbol{v}}$$

右辺は $\mathbb{C}^n$ の内積である。同様に

$$(\boldsymbol{u},A^*\boldsymbol{u}) = {}^t\boldsymbol{u}\overline{A^*\boldsymbol{v}} = {}^t\boldsymbol{u}\,\bar{A}^*\bar{\boldsymbol{v}} = {}^t\boldsymbol{u}\,{}^tA\bar{\boldsymbol{v}} \quad \blacksquare$$

定義 正方行列 A が**エルミート行列**であるとは，$A^* = A$ を満たすとき。

例 9.8 実対称行列はエルミートである。また，$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ もエルミート行列である。

定義 エルミート行列 A が**正値**であるとは，任意の $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0} \in \mathbb{C}^n$ に対して，$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) > 0$ が成り立つとき。

例 9.9 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ は正値である。$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ は正値でない。

定理 9.10 H をエルミート行列とする。$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_H = (H\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

と定めると，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_H$ はエルミート内積の (1), (2), (3) をみたす。さらに H が正値ならば，$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_H$ は（標準内積と別の）エルミート内積を定める。 $\blacksquare$

問題 9.11 任意の (n,m) 型行列 A に対し，A^*A はエルミートである。さらに，A が正則ならば，A^*A は正値である。

定義 正方行列 A が，**ユニタリ行列**であるとは $A^*A = E$ を満たすとき。

A が実行列ならば，$A^* = {}^tA$ であるから，実行列がユニタリ行列である必要十分条件は直交行列であることである。

$\det(A^*) = \overline{\det(A)}$ であるから，ユニタリ行列 A の行列式は $|\det(A)| = 1$ を満たす。すなわち，θ を偏角として，$\det(A) = e^{i\theta}$ である。直交行列の行列式は ± 1 である。

定理 9.12 (ユニタリ行列) n 次正方行列 A に関する次の 4 条件は同値である。

(a) A はユニタリ行列である。

(b) $\|A\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{u}\| \quad (\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n)$

(c) $(A\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \quad (\forall \boldsymbol{u},\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n)$

(d) A の列ベクトル $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ は正規直交基である。

証明 (1) “ (a)⇒(b) ” $A^*A=E$ を仮定する。$\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^n$ に対して

$$\|A\boldsymbol{u}\|^2=(A\boldsymbol{u},A\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},A^*A\boldsymbol{u})=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\|\boldsymbol{u}\|^2$$

よって (b) が成り立つ。

(2) “ (b)⇒(c) ” (b) を仮定する。$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n$ に対して

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2=\|\boldsymbol{u}\|^2+\|\boldsymbol{u}\|^2+2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$
$$\|A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\|^2=\|A\boldsymbol{u}\|^2+\|A\boldsymbol{u}\|^2+2\,\mathrm{Re}(A\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})$$

等しいところを引くと

$$\mathrm{Re}(A\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})=\mathrm{Re}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

したがって，$(A\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})$ と $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ の実部は一致する。$\boldsymbol{u}$ の代わりに $i\boldsymbol{u}$ を代入すれば，虚部も一致することがわかる。

(3) “ (c)⇒(d) ” (c) を仮定する。$\mathbb{C}^n$ の基本ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ は正規直交基である。また，$\boldsymbol{a}_i=A\boldsymbol{e}_i$ である。したがって

$$(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=(A\boldsymbol{e}_i,A\boldsymbol{e}_j)=(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}$$

(4) “ (d)⇒(a) ” (d) を仮定する。A^*A を計算すると

$$A^*A={}^t(\bar{\boldsymbol{a}}_1,\ldots,\bar{\boldsymbol{a}}_n)(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=\begin{pmatrix}{}^t\bar{\boldsymbol{a}}_1\\ \vdots\\ {}^t\bar{\boldsymbol{a}}_n\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$$

であるから，A^*A の (i,j) 成分は ${}^t\bar{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{a}_j$ である。ここで

$${}^t\bar{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{a}_j=\overline{({}^t\boldsymbol{a}_i\bar{\boldsymbol{a}}_j)}=\overline{(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)}=(\boldsymbol{a}_j,\boldsymbol{a}_i)=\delta_{ij}$$

したがって，A^*A は単位行列である。 ■

系 9.13 2 つのユニタリ行列の積はまたユニタリ行列である。 ■

問題 9.14 任意の単位ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ に対して，$\boldsymbol{a}_1$ を第 1 列とするユニタリ行列 $A=(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ を見つけることができる。

問題 9.15 2 次のユニタリ行列をすべて書き下せ。

10 正規行列のユニタリ行列による対角化

定義 正方行列 A が**正規行列**であるとは，$A^*A = AA^*$ を満たすとき。

エルミート行列もユニタリ行列も正規行列である。また，実行列では，直交行列，対称行列，交代行列（${}^tA = -A$）も正規行列である。

定理 10.1 (正規行列の対角化) n 次正方行列 A が正規行列である必要十分条件は，あるユニタリ行列 U により対角化できること。

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

証明 (1) “ 十分性 ” 複素数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とユニタリ行列 U に対して

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とすると，$U^{-1} = U^*$ であるから

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*, \quad A^* = U \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} U^*$$

と表される。$U^*U = E$ より，次が成り立つ。

$$A^*A = U \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & O \\ & \ddots & \\ O & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} U^* = AA^*$$

(2) “ 必要性 ” $A^*A = AA^*$ とする。まず，A をユニタリ行列 U で三角化する。

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

右辺を T とおき，$U^{-1} = U^*$ に注意すると，$T = U^*AU,\ T^* = U^*A^*U$ となる。したがって

$$T^*T = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU = U^*AA^*U = U^*AUU^*A^*U = TT^*$$

となり，T は正規行列である。一方

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ & \lambda_2 & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \lambda_{n-1} & a_{(n-1)n} \\ O & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とおくと

$$T^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & & O \\ \bar{a}_{12} & \bar{\lambda}_2 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \bar{a}_{1(n-1)} & \bar{a}_{2(n-1)} & \dots & \bar{\lambda}_{n-1} & \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{(n-1)n} & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

したがって，T^*T の (i,i) 成分は

$$|a_{1i}|^2 + |a_{2i}|^2 + \cdots + |a_{(i-1)i}|^2 + |\lambda_i|^2$$

ところが，TT^* の (i,i) 成分は $|\lambda_i|^2$ で，これらは等しいから

$$|a_{1i}|^2 + |a_{2i}|^2 + \cdots + |a_{(i-1)i}|^2 = 0$$

が成り立つ。すなわち，$a_{1i} = a_{2i} = \cdots = a_{(i-1)i} = 0$ となる。すべての i について成り立つから，T は対角行列である。 ■

系 10.2 A を正規行列とすると，A と A^* は同じユニタリ行列で対角化される。

$$U^{-1}A^*U = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

系 10.3 正規行列 A について，次が成り立つ。

(1) “ A はエルミート行列 ” $\Longleftrightarrow$ “ A の固有値はすべて実数 ”

(2) “ A はユニタリ行列 ” $\Longleftrightarrow$ “ A の固有値はすべての絶対値 1 の複素数 ”

証明 U をユニタリ行列とすると，$U^{-1} = U^*$ であるから

$$\text{“ } A \text{ はエルミート行列 ”} \Longleftrightarrow \text{“ } U^{-1}AU \text{ はエルミート行列 ”}$$

である。また

$$\text{“ } A \text{ はユニタリ行列 ”} \Longleftrightarrow \text{“ } U^{-1}AU \text{ はユニタリ行列 ”}$$

も成り立つ。したがって，(1)，(2) は A が対角行列のときに示せば十分であるが，それは明らか。 ■

系 10.4 エルミート行列 H の最小の固有値を α，最大の固有値を β とすると，単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して，次式が成り立つ。

$$\alpha \leqq (H\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \leqq \beta$$

問題 10.5 次の行列に対し，正規行列であることを確かめ，ユニタリ行列によって対角化せよ。エルミート行列はどれか。また，ユニタリ行列はどれか。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad (4)\quad \begin{pmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{pmatrix}$$

$$(5)\quad \begin{pmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}) \qquad (6)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

問題 10.6 A を n 次正方行列とする。$B = \dfrac{1}{2}(A + A^*)$, $C = \dfrac{1}{2i}(A - A^*)$ とお

くと，これらはエルミートで，$A = B + iC$ と表される。A が正規であるための必要十分条件は $BC = CB$ である。

問題 10.7 n 次正方行列 A の固有値 λ の絶対値の 2 乗 $|\lambda|^2$ は，A^*A の最小固有値 α と最大固有値 β の間にある。

$$\alpha \leqq |\lambda|^2 \leqq \beta$$

11 直交行列の標準形

正規行列の対角化の理論を実正規行列に応用してみよう。実数を，虚部が 0 の複素数と思うと，実行列（実数を成分とする行列）を複素行列と思うことができる。A が実行列ならば，$\bar{A} = A$ であるから，随伴行列 A^* と転置行列 ${}^tA$ は一致する。したがって，実行列が複素行列と思って正規行列になるための条件は，$A\,{}^tA = {}^tAA$ である。

A を実正規行列とする。A は正規行列であるから，前章の定理より，あるユニタリ行列 U で

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となるものが存在する。ここで，U をつくる n 個の列ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ とすると，$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の正規直交基で，上式は

$$A\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1\boldsymbol{u}_1,\ \ldots,\ A\boldsymbol{u}_n = \lambda_n\boldsymbol{u}_n$$

と表されることがわかる。

A は実行列であることに注意して，複素共役を考えると

$$A\bar{\boldsymbol{u}}_i = \bar{\lambda}_i\bar{\boldsymbol{u}}_i$$

が成り立つ。すなわち，$\bar{\boldsymbol{u}}_i$ は固有値 $\bar{\lambda}_i$ に属する固有ベクトルである。

ここで，λ_i を虚数と実数に分けよう。虚部が正の複素固有値を，重複を許して，$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とおくと，同じ個数だけ虚部が負の複素固有値があり，残りを実固有値 $\lambda_{2r+1}, \ldots, \lambda_n$ とする。

まず，実固有値 $\mu = \lambda_j$ については，A が複素行列として対角化可能であるから，固有方程式の解 μ の重複度 m と同じ次元の複素固有空間がある。したがって

$$\mathrm{rank}(\mu E - A) = n - m$$

が成り立つ。ところが，A は実行列で，μ も実数であるから，μ に属する実固有空間の次元も m であることがわかる。すべての実固有値に対して，このことが成り立つから，$n-2r$ 個の実固有ベクトルからなる正規直交系 $\boldsymbol{v}_{2r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在する。実固有値を，記号をあらためて $a_{2r+1}, \ldots, a_n$ とおくと

$$A\boldsymbol{v}_j = a_n\boldsymbol{v}_j \quad (j = 2r+1, \ldots, n)$$

が成り立つ。

複素固有値については，複素行列と思って対角化可能であるから，固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ に属する固有ベクトルによる正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ がある。そのとき，$\bar{\boldsymbol{u}}_1, \ldots, \bar{\boldsymbol{u}}_r$ は固有値 $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_r$ に属する固有ベクトルで，同時に，正

規直交系でもある。これら 2 つの組は，固有値が異なるから，合わせても 1 次独立で，正規直交系である。

ここで，新たに

$$\boldsymbol{v}_{2j-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_j + \bar{\boldsymbol{u}}_j), \quad \boldsymbol{v}_{2j} = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{u}_j - \bar{\boldsymbol{u}}_j)$$

とおくと，これらは実ベクトルで

$$\boldsymbol{u}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j-1} + \frac{i}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j}, \quad \bar{\boldsymbol{u}}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j-1} - \frac{i}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j}$$

が成り立つ。さらに

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}_{2j-1}, \boldsymbol{v}_{2k-1}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_j + \bar{\boldsymbol{u}}_j), \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_k + \bar{\boldsymbol{u}}_k)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_k) + (\boldsymbol{u}_j, \bar{\boldsymbol{u}}_k) + (\bar{\boldsymbol{u}}_j, \boldsymbol{u}_k) + (\bar{\boldsymbol{u}}_j, \bar{\boldsymbol{u}}_k)\right\} \\
&= \delta_{jk} \\
(\boldsymbol{v}_{2j}, \boldsymbol{v}_{2k}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{u}_j - \bar{\boldsymbol{u}}_j), \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{u}_k - \bar{\boldsymbol{u}}_k)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_k) - (\boldsymbol{u}_j, \bar{\boldsymbol{u}}_k) - (\bar{\boldsymbol{u}}_j, \boldsymbol{u}_k) + (\bar{\boldsymbol{u}}_j, \bar{\boldsymbol{u}}_k)\right\} \\
&= \delta_{jk} \\
(\boldsymbol{v}_{2j-1}, \boldsymbol{v}_{2k}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{u}_j + \bar{\boldsymbol{u}}_j), \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\boldsymbol{u}_k - \bar{\boldsymbol{u}}_k)\right) \\
&= -\frac{1}{2i}\left\{(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_k) - (\boldsymbol{u}_j, \bar{\boldsymbol{u}}_k) + (\bar{\boldsymbol{u}}_j, \boldsymbol{u}_k) - (\bar{\boldsymbol{u}}_j, \bar{\boldsymbol{u}}_k)\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{2r}$ は正規直交系である。そして，λ_j の実部，虚部をそれぞれ a_j，b_j とおく。$\lambda_j = a_j + ib_j$ である。

$$\begin{aligned}
A\boldsymbol{v}_{2j-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A\boldsymbol{u}_j + A\bar{\boldsymbol{u}}_j\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_j\boldsymbol{u}_j + \bar{\lambda}_j\bar{\boldsymbol{u}}_j) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\lambda_j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j-1} + \frac{i}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j}\right) + \bar{\lambda}_j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j-1} - \frac{i}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}(\lambda_j + \bar{\lambda}_j)\boldsymbol{v}_{2j-1} + \frac{i}{2}(\lambda_j - \bar{\lambda}_j)\boldsymbol{v}_{2j} \\
&= a_j\boldsymbol{v}_{2j-1} - b_j\boldsymbol{v}_{2j} \\
A\boldsymbol{v}_{2j} &= \frac{1}{\sqrt{2}\,i}\left(A\boldsymbol{u}_j - A\bar{\boldsymbol{u}}_j\right) = \frac{1}{\sqrt{2}\,i}(\lambda_j\boldsymbol{u}_j - \bar{\lambda}_j\bar{\boldsymbol{u}}_j) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\,i}\left\{\lambda_j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j-1} + \frac{i}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j}\right) - \bar{\lambda}_j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j-1} - \frac{i}{\sqrt{2}}\boldsymbol{v}_{2j}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2i}(\lambda_j - \bar{\lambda}_j)\boldsymbol{v}_{2j-1} + \frac{1}{2}(\lambda_j + \bar{\lambda}_j)\boldsymbol{v}_{2j} \\
&= b_j\boldsymbol{v}_{2j-1} + a_j\boldsymbol{v}_{2j}
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{2r}\boldsymbol{v}_{2r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を並べて得られる行列を V とおくと，これは実直交行列で，次の定理が得られた。

定理 11.1 (実正規行列の標準形) n 次実正規行列 A に対して，実直交行列 V が存在して，$V^{-1}AV$ を次の形にできる。

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{matrix}} & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} a_r & -b_r \\ b_r & a_r \end{matrix}} & & & \\ & & & a_{2r+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & a_n \end{pmatrix}$$

■

特に，A が実対称行列ならば，複素行列としてはエルミート行列で，すべての固有値が実数である。したがって，直交行列による対角化が得られる。

系 11.2 (実対称行列の対角化) n 次実対称行列 A は，実直交行列 V により対角化される。

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{pmatrix} \quad ■$$

また，A が実直交行列ならば，複素行列としてはユニタリ行列で，すべての固有値の絶対値は 1 である。複素数であれば $\lambda_i = e^{i\theta_i}$ となり，実部は $\cos\theta_i$ で，虚部は $\sin\theta_i$ である。実固有値は ± 1 のいずれかである。

系 11.3 (実直交行列の標準形) n 次実直交行列 A に対して，実直交行列 V が存在して，$V^{-1}AV$ を次の形にできる。

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{matrix}} & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{matrix}} & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

■

問題 11.4 2 次の直交行列は，次のどちらかの形である。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

問題 11.5 次の行列が直交行列になるように a, b, c, d を定めよ。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & -b & c \\ a & 0 & d \end{pmatrix}$$

問題 11.6 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ を単位ベクトルとするとき，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に $\boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ を対応させる線形写像は直交変換である。

問題 11.7 成分がすべて 0 でない有理数からなる 2, 3, 4 次の直交行列をさがせ。