§1.　群の定義

定義　G を空でない集合とする．直積集合 $G \times G = \{ (x,y) \mid x, y \in G \}$ から G への写像を G の**二項演算**という．

例 1.1　$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (x,y) \mapsto x+y$ は $\mathbb{N}$ の二項演算である．$\mathbb{N}$ の代わりに $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ を考えても同様である。

例 1.2　$\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} - \{0\} = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a \neq 0 \}$ とおく．$\mathbb{Q}^\times \times \mathbb{Q}^\times$ から $\mathbb{Q}^\times$ への写像

$$m(x,y) = xy, \qquad q(x,y) = \frac{x}{y}$$

はどちらも $\mathbb{Q}^\times$ の二項演算である．

例 1.3　空でない集合 A に対して，A から A への写像全体の集合を $\mathrm{Map}(A)$ とする．$f, g \in \mathrm{Map}(A)$ に対して合成写像 $g \circ f \in \mathrm{Map}(A)$ を対応させる写像は，$\mathrm{Map}(A)$ の二項演算である．

定義　空でない集合 G の二項演算 $\mu : G \times G \to G$ を考える．

(1) 任意の $x, y, z \in G$ に対して，$\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x, \mu(y,z))$ が成り立つとき，μ は**結合的**であるという．

(2) 任意の $x, y \in G$ に対して，$\mu(x,y) = \mu(y,x)$ が成り立つとき，μ は**可換**であるという．

(3) G の元 e は，すべての $x \in G$ に対して $\mu(e,x) = \mu(x,e) = x$ がみたされるとき，μ に関する G の**単位元**という．

例 1.4　$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (x,y) \mapsto x+y$ は結合的かつ可換であるが，単位元をもたない．

例 1.5　$\mathbb{Q}^\times$ の二項演算 $(x,y) \mapsto xy$ は結合的かつ可換であるが，$(x,y) \mapsto x/y$ は結合的でも可換でもない．また，前者に関する単位元として 1 がとれる．

例 1.6　空でない集合 A に対して，$\mathrm{Map}(A)$ の二項演算 $(f,g) \mapsto g \circ f$ は結合的であるが，A が 2 個以上の元をもつときは可換ではない．また，恒等写像 $I \in \mathrm{Map}(A)$（すなわち，任意の $a \in A$ について $I(a) = a$）は単位元である．

命題 1.7 (単位元の一意性)　空でない集合 G の二項演算 μ に関して，もし単位元が存在するならば，それは一意的に定まる．

定義　　μ を空でない集合 G の二項演算とし，さらに μ に関する G の逆元 e が存在するとする．　$x \in G$ に対して $\mu(x, y) = \mu(y, x) = e$ をみたす $y \in G$ が存在するとき，x は（μ に関して）**可逆**であるといい，y を（μ に関する）x の**逆元**という．

命題 1.8 (逆元の一意性)　G, μ, e は前定義のとおりとし，さらに μ は結合的であるとする．　このとき，もし $x \in G$ が可逆ならば，その逆元は一意的に定まる．

定義　(群の定義)　G を空でない集合，μ をその結合的な二項演算とし，単位元が存在するとする．　さらに，G のすべての元が μ に関して可逆であるとき，G は μ に関して**群**であるという．　さらに，μ が可換であるとき**可換群**，または**アーベル群**という．

以後，集合 G の二項演算 $\mu : G \times G \to G$ が与えられたとき，$x, y \in G$ に対して $\mu(x, y)$ を $x\,\mu\,y$ のように書くことにしよう．　たとえば，$\mathbb{Z}$ における和や積を $x + y$, $x \cdot y$ のように表すことを念頭に置けばよい．　さらに積については $\cdot$ も略して xy と書くのが普通である．

そこで，群論において一般論を展開する際は，二項演算を

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (x, y) \mapsto xy$$

で表すのが通常のやり方である（このような群をこの講義では乗法群ということがある）．　この記法を用いれば，

- 結合的:　任意の $x, y, z \in G$ について $x(yz) = (xy)z$ が成り立つ．
- e が単位元:　任意の $x \in G$ について $xe = ex = x$ が成り立つ．
- $x \in G$ が可逆:　$xy = yx = e$ をみたす $y \in G$ が存在する．

なんてふうに簡単に書ける．

いま，群 G の元 x と自然数 n に対して

$$x^n = \underbrace{xx\cdots x}_{n}, \qquad x^{-n} = \underbrace{yy\cdots y}_{n}$$

とする．　ただし，y は x の逆元である．　さらに $x^0 = e$（単位元）とおけば，すべての整数 n に対して x^n が定まる．　とくに，x^{-1} は x の逆元のことであり，通常の記法と合っていて安心である．