§2. 部分群

定義 H を群 G の空でない部分集合とする．G の二項演算を H に制限したものが H の二項演算であり，それによって H が群になるとき，H を G の**部分群**という．

命題 2.1 H を群 G の部分群とする．

(1) H の単位元と G の単位元は等しい．

(2) 任意の $x \in H$ に対して，x の H における逆元と G における逆元は一致する．

定理 2.2 H を群 G の空でない部分集合とするとき，次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i) H は G の部分群である．

(ii) 任意の $x, y \in H$ に対して，$xy \in H$ かつ $x^{-1} \in H$.

(iii) 任意の $x, y \in H$ に対して，$x^{-1}y \in H$.

定理 2.3 H_1, H_2 が G の部分群ならば，$H_1 \cap H_2$ も G の部分群である．

定義 群 G の部分集合 A, B に対して

$$AB = \{\ ab \mid a \in A,\ b \in B\ \}, \quad A^{-1} = \left\{\ a^{-1} \mid a \in A\ \right\}$$

とし，さらに $x, y \in G$ に対し，

$$xA = \{\ xa \mid a \in A\ \}, \quad Ay = \{\ ay \mid a \in A\ \}, \quad xAy = \{\ xay \mid a \in A\ \}$$

と定める．

定理 2.4 群 G の部分群 A, B が $AB = BA$ をみたすならば，AB は G の部分群である．

定義 N を群 G の部分群とする．任意の $x \in G$ に対して $x^{-1}Nx = N$ が成り立つとき，N を G の**正規部分群**という．

定理 2.5 N を群 G の正規部分群とすると，G の任意の部分群 H について $NH = HN$ が成り立ち，さらに NH は G の部分群である．