§4.　生成系

定義　群 G の部分集合 S に対して，S を含む G の部分群のうち最小のものを $\langle S\rangle$ で表す．さらに，$S=\{a_1,\cdots,a_m\}$ のとき，$\langle S\rangle$ を $\langle a_1,\cdots,a_m\rangle$ と略記する．$S_1,\cdots,S_n\subset G$ のとき，$\langle S_1\cup\cdots\cup S_n\rangle$ を $\langle S_1,\cdots,S_n\rangle$ と略記することがある．

定義　群 G がその部分集合 S で生成されるとき，S を G の**生成系**とよぶ．このとき，S は G を**生成する**ともいう．さらに，$S=\{a_1,\cdots,a_m\}$ のとき，$a_1,\cdots,a_m$ を G の**生成元**とよび，$a_1,\cdots,a_m$ は G を**生成する**という．

例 4.1　巡回群とは，ただ一つの元で生成される群のことである．すなわち，G が巡回群であるための必要十分条件は，$G=\langle g\rangle$ をみたす $g\in G$ が存在することである．

例 4.2　$\mathbb{Z}$ は和に関して 1 を生成元とする無限巡回群である．

例 4.3　素数全体の集合を P とし，$\tilde{P}=P\cap\{-1\}$ とおくと，$\tilde{P}$ は積に関する群 $\mathbb{Q}^\times$ の生成系である．

例 4.4　$\{1,2,3\}$ の置換全体は合成に関して群となる．これを S_3 と書き，3 次対称群という．$\sigma=(1\ 2\ 3)$, $\tau=(1\ 2)$ とおくと，S_3 はこれらで生成される．すなわち $S_3=\langle\sigma,\tau\rangle$.

補題 4.5　A,B を群 G の部分群とする．もし AB が群ならば，$AB=\langle A,B\rangle$ が成り立つ．

定理 4.6　群 G の部分群 A,B が以下の (a), (b), (c) のどれかをみたすならば，$AB=\langle A,B\rangle$ が成り立つ．

(a) A は G の正規部分群である．

(b) B は G の正規部分群である．

(c) $AB=BA$.