§5.　同値類別

定義　S を空でない集合とする．S の空でない部分集合 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ が

$$C_1 \cup \cdots \cup C_n = C, \qquad C_i \cap C_j = \phi \ (i \neq j)$$

をみたすとき，$\{C_1, \cdots, C_n\}$ を S の**分割**という．このとき，C_i に属する元を C_i の**代表元**という．さらに，各 C_i から（任意に）ひとつずつ元 x_i をとって集めたもの，$x_1, \cdots, x_n$ をこの分割の**完全代表系**という．

定義　集合 S の元 x, y に対して，$x \sim y$ または $x \not\sim y$ のどちらか一方が成り立つとき，$\sim$ を S 上の**関係**という（言い換えれば，関係とは $S \times S$ の部分集合とみなすこともできる;　「$x \sim y \Leftrightarrow (x, y) \in S \times S$」 と考える）．

定義　集合 S 上の関係 $\sim$ は，任意の $x, y, z \in S$ に対して以下の条件をすべてみたすとき，**同値関係**であるという．

(e1) $x \sim x$.

(e2) $x \sim y$ ならば $y \sim x$.

(e3) $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば，$x \sim z$.

定義　集合 S 上の同値関係 $\sim$ が与えられたとき，$x \in S$ に対して

$$C(x) = \{\, y \in S \,|\, x \sim y \,\}$$

を，x の属する**同値類**という．

命題 5.1　集合 S 上の同値関係 $\sim$ が与えられたとする．このとき，$x, y \in S$ に対して，$x \sim y$ であることは次の (i)–(iv) のどれとも同値である．

(i) $y \in C(x)$　　(ii) $x \in C(y)$　　(iii) $C(x) = C(y)$　　(iv) $C(x) \cap C(y) \neq \phi$

定義　集合 S 上の同値関係 $\sim$ が与えられたとき，$C(x)$ $(x \in S)$ のうち，異なるものを集めて得られる集合 $\{C(x_1), \cdots, C(x_r)\}$ は S の分割である．この集合を，同値関係 $\sim$ による S の**同値類集合**または**商集合**といい，$S/\!\sim$ で表す;

$$S/\!\sim\, = \{C(x_1), \cdots, C(x_r)\}\,.$$