§6. 剰余類分解

補題 6.1　G を群，H をその部分群とする．$x, y \in G$ に対して，$x \sim y$ を

$$x^{-1}y \in H \quad \text{が成り立つこと}$$

と定めると，$\sim$ は G 上の同値関係である．

定義　前補題のように定めた同値関係 $\sim$ による同値類を，G の H による**左剰余類**という．また，商集合（同値類集合）$S/\sim$ をとくに

$$G/H$$

と表し，G の H による**左剰余類集合**という．さらに，G/H の元の個数を H の**指数**といい

$$(G : H)$$

で表す．

命題 6.2　群 G の部分群 H による左剰余類は

$$xH = \{\, xh \mid h \in H \,\} \qquad (x \in G)$$

と表され，逆にこのように表される G の部分集合は左剰余類である．（群の演算が加法 “$+$” の場合，xH のかわりに $x + H$ と書くことが多い．）

補題 6.3　群 G の部分群 H による左剰余類 xH について，写像

$$f : H \longrightarrow xH, \qquad h \mapsto xh$$

は全単射である．

系 6.4　群 G の有限部分群 H による各左剰余類の元の個数は一定で，H の位数に等しい．

定理 6.5 (ラグランジュ)　有限群 G の部分群 H に対して，$|G| = (G : H)|H|$ が成り立つ．とくに，H の位数および指数は G の位数の約数である．

系 6.6　G が有限群ならば，任意の $x \in G$ に対して，x の位数は G の位数の約数である．

系 6.7 (オイラー)　n を 1 より大きい任意の整数とする．n と互いに素な整数 a に対して，

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

が成り立つ．ここで，φ はオイラー関数，すなわち $\varphi(n) = \left|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}\right|$ である．

定義　G を群，H をその部分群とする．$x, y \in G$ に対して，$x \approx y$ を

$$xy^{-1} \in H \quad \text{が成り立つこと}$$

と定めると,（補題 6.1 と同様にして）$\approx$ は G 上の同値関係であることが示される．その同値類を G の H による**右剰余類**という．また，商集合（同値類集合）$S/\approx$ を

$$H \backslash G$$

と表し，G の H による**右剰余類集合**という．

命題 6.8　群 G の部分群 H による右剰余類は

$$Hy = \{\, hy \mid h \in H \,\} \qquad (y \in G)$$

と表され，逆にこのように表される G の部分集合は右剰余類である．

命題 6.9　群 G の部分群 H に対して，写像

$$f : G/H \longrightarrow H \backslash G, \qquad xH \mapsto Hx^{-1}$$

が定義できる．すなわち，$xH = yH$ ならば $Hx^{-1} = Hy^{-1}$ が成り立つ．さらに f は全単射である．