# §7. 正規部分群と剰余群

**定理 7.1** 群 $G$ の部分群 $N$ に対して，次の (i)–(vi) は同値である．

(i) $\forall x \in G$ に対して，$x^{-1}Nx = N$，すなわち $N$ は $G$ の正規部分群である．

(ii) $\forall x \in G$ に対して，$x^{-1}Nx \subset N$.

(iii) $\forall x \in G$ に対して，$x^{-1}Nx \supset N$.

(iv) $\forall x \in G$ に対して，$Nx = xN$.

(v) $\forall x \in G$ に対して，$Nx \subset xN$.

(vi) $\forall x \in G$ に対して，$Nx \supset xN$.

**定理 7.2** $N$ が 群 $G$ の正規部分群であるためには，$N$ の左剰余類集合と右剰余類集合が一致することが必要十分である．

**例 7.3** アーベル群の部分群はすべて正規部分群である．

**例 7.4** $\{1, 2, 3\}$ 上の置換全体の群を 3 次対称群といい $S_3$ で表す（前出）． この群は $\sigma = (1\ 2\ 3),\ \tau = (1\ 2)$ で生成され，

$$S_3 = \langle \sigma, \tau \rangle = \{\, e,\, \sigma,\, \sigma^2,\, \tau,\, \sigma\tau,\, \sigma^2\tau \,\}.$$

いま，$\sigma$ で生成される $G$ の部分群を $N$ とし，$\tau$ で生成される部分群を $H$ とすると，$N$ は正規部分群であるが，$H$ は正規部分群ではない．

**定義** $N$ が 群 $G$ の正規部分群のとき，左右剰余類を区別せず，単に**剰余類**とよぶ．

**命題 7.5** $N$ を群 $G$ の正規部分群とする． $A, B$ を $G$ の $N$ に関する剰余類とすると，集合 $AB$ および $A^{-1}$ は $G$ の剰余類である． 詳しくは，$x, y \in G$ に対して，

$$(xN)(yN) = (xy)N, \qquad (xN)^{-1} = x^{-1}N$$

が成り立つ．

**定理 7.6**　$N$ を群 $G$ の正規部分群とする．$A, B \in G/N$ に対して積を $AB$ と定めることにより，$G/N$ は群となる．単位元は $eN = N$ であり，$A$ の逆元は $A^{-1}$ である．

**定義**　前定理のように定まる群 $G/N$ を $G$ の $N$ による**剰余群**という．

**例 7.7**　上の例 7.4 と同じ記号で，$S_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$ の $N = \langle \sigma \rangle$ による剰余群は

$$S_3/N = \{\, N,\, \tau N \,\}$$

であり，これは位数 2 の巡回群である．

**例 7.8**　任意の自然数 $n$ に対して，$n$ の倍数全体の集合 $n\mathbb{Z}$ は加法群 $\mathbb{Z}$ の部分群である．加法群 $\mathbb{Z}$ は（もちろん）アーベル群であるから，$n\mathbb{Z}$ は正規部分群であって，それによる剰余群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が考えられる．

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\, a + n\mathbb{Z} \,|\, a \in \mathbb{Z} \,\} = \{\, 0 + n\mathbb{Z},\, 1 + n\mathbb{Z},\, 2 + n\mathbb{Z}, \ldots, (n-1) + n\mathbb{Z} \,\}$$

であり，これは位数 $n$ の巡回群である．