§8. 準同型定理

定義 群 G_1 から群 G_2 への写像 $f : G_1 \to G_2$ は,

$$\text{任意の } x, y \in G_1 \text{ に対して,} \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

をみたすとき,**準同型写像**であるという. さらに全単射であるとき **同型写像**であるという.

定義 ふたつの群 G_1, G_2 に対して,G_1 から G_2 への同型写像が存在するとき,G_1 と G_2 は**同型**であるという.

定義 群 G_1 から群 G_2 への準同型写像 $f : G_1 \to G_2$ に対して,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{\ f(x) \mid x \in G_1\ \}, \\ \operatorname{Ker} f &= \{\ x \in G_1 \mid f(x) = e\,(= \text{“}G_2 \text{ の単位元”})\ \} \end{aligned}$$

をそれぞれ f の**像**,**核**という.

補題 8.1 G_1, G_2 を群とし,$f : G_1 \to G_2$ を準同型写像とする.

(1) $\operatorname{Im} f$ は G_2 の部分群である.

(2) $\operatorname{Ker} f$ は G_1 の正規部分群である.

例 8.2 実数 x に対して e^x を対応させる写像は,加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{R}^\times$ への準同型写像とみなすことができる. 核は単位群 $\{0\}$ であり,像は正の実数全体が作る乗法群である.

例 8.3 加法群 $\mathbb{R}$ から乗法群 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ への写像

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad x \mapsto e^{2\pi i x}$$

は準同型写像である. 像と核は

$$\operatorname{Im} f = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\,\} \ \text{(単位円周)}, \qquad \operatorname{Ker} f = \mathbb{Z}$$

で与えられる.

命題 8.4　G_1, G_2 を群とし，$f : G_1 \to G_2$ を準同型写像とする．もし，f の核が単位群（すなわち $\operatorname{Ker} f = \{e\}$）ならば，次が成り立つ．

(1) f は単射である．

(2) G_1 は f の像と同型である（とくに G_1 は G_2 のある部分群と同型である）．

例 8.5　例 8.2 によれば，$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times, \quad x \mapsto e^x$ は単射である．その像は正の実数全体が作る乗法群であり，それを $\mathbb{R}_+$ と書けば，加法群 $\mathbb{R}$ と乗法群 $\mathbb{R}_+$ は同型である．また，逆写像 $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は $x \mapsto \log x$ で与えられ，これも同型写像である．

定義　群 G とその正規部分群 N に対して，写像

$$\nu : G \longrightarrow G/N, \quad x \mapsto xN$$

は準同型であるが，これを**自然な全射**という．

命題 8.6　$f : G \to H$ を群の準同型写像とし，N を群 G の正規部分群とする．もし $N \subset \operatorname{Ker} f$ ならば，準同型写像

$$\tilde{f} : G/N \longrightarrow H$$

が存在して，$f = \tilde{f} \circ \nu$ が成り立つ．ただし，

$$\nu : G \longrightarrow G/N$$

は自然な全射とする．

定理 8.7 (準同型定理)　群の準同型写像 $f : G \to H$ に対して，同型写像

$$\tilde{f} : G/\operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Im} f$$

が存在して，$f = \tilde{f} \circ \nu$ が成り立つ．ただし，

$$\nu : G \longrightarrow G/\operatorname{Ker} f$$

は自然な全射とする．

例 8.8　$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^\times$ を例 8.3 で定めた準同型写像とすると，準同型定理から，加法群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は，単位円周の作る乗法群と同型である．