§9.　同型定理

補題 9.1　$f : G \to H$ を群の準同型写像とすると，H の任意の部分群 M に対して

$$f^{-1}(M) = \{\, x \in G \mid f(x) \in M \,\}$$

は G の部分群である．さらに，M が H の正規部分群ならば，$f^{-1}(M)$ は G の正規部分群である．

定理 9.2 (第１同型定理)　$f : G \to H$ を群の全射準同型写像とする．H の任意の正規部分群 M に対して，$N = f^{-1}(M)$ とおけば，同型写像

$$G/N \longrightarrow H/M$$

が引き起こされる．

定理 9.3 (第２同型定理)　H を群 G の部分群とし，N を G の正規部分群とする．このとき，HN は G の部分群であり，$H \cap N$ は H の正規部分群である．さらに，写像 $H \to HN/N,\ \ x \mapsto xN$ によって同型写像

$$H/(H \cap N) \longrightarrow HN/N$$

が引き起こされる．

定理 9.4 (第３同型定理)　N, M を群 G の正規部分群で $N \subset M$ をみたすものとする．このとき，M/N は G/N の正規部分群である．さらに，準同型写像 $G/N \to G/M,\ \ xN \mapsto xM$ が定義でき，これが同型写像

$$(G/N)/(M/N) \longrightarrow G/M$$

を引き起こす．

例 9.5　有理数を成分とする 2 次正則行列全体が作る乗法群 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$ の部分群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, d \in \mathbb{Q}^{\times},\, b \in \mathbb{Q} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{Q}^{\times},\, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

を考えると，N は G の正規部分群である．このとき，剰余群 G/N がどのような群かを調べたい．いま，

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \middle| a, d \in \mathbb{Q}^\times \right\}$$

とおくと，H は G の部分群であって $G = HN$ が成り立つ．さらに，

$$H \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Q}^\times \right\} \quad (\text{スカラー行列全体})$$

であって，準同型写像 $H \to HN/N = G/N, \ \ x \mapsto xN$ は同型写像

$$H/(H \cap N) \longrightarrow G/N$$

を引き起こす．一方，$H \to \mathbb{Q}^\times, \ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{a}{d}$ は H から乗法群 $\mathbb{Q}^\times$ への全射準同型写像であって，その核は $H \cap N$ であることが確かめられる．したがって同型写像

$$H/(H \cap N) \longrightarrow \mathbb{Q}^\times$$

が存在する．以上をまとめて，G/N は $\mathbb{Q}^\times$ と同型であることがわかる．