§10.　可解群

定義　単位群 $\{e\}$ でない群 G について，その正規部分群が G と単位群のみであるとき，G を**単純群**という．

命題 10.1　G を有限アーベル群とする．G が単純群であるためには，G が素数を位数とする巡回群であることが必要十分である．

定義　G を群とする．G の部分群の有限列

$$G = G_0 \supsetneq G_1 \supsetneq G_2 \supsetneq \cdots \supsetneq G_r = \{e\}$$

が存在して，各 $i = 1, \ldots, r$ について，G_i が G_{i-1} の正規部分群であり，かつ剰余群 G_{i-1}/G_i がアーベル群であるとき，G は**可解群**であるという．単位群も可解群と考える．

補題 10.2　アーベル群は可解群である．

補題 10.3　G を可解群とすると，次が成り立つ．

(1) G の任意の部分群は可解群である．

(2) G の任意の正規部分群による剰余群は可解群である．

命題 10.4　G を群とし，N を G の正規部分群とする．G が可解群であるためには，N および G/N がともに可解群であることが必要十分である．

定義　G を群とする．

(1) $x, y \in G$ に対して，$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ と定め x, y の**交換子**という．

(2) G の交換子全体で生成される G の部分群 を $D(G)$ で表し，G の**交換子群**という（$D(G)$ を $[G, G]$ と書くこともある）．

命題 10.5　G を群とする．

(1) G がアーベル群であるためには，$D(G)$ が単位群であることが必要十分である．

(2) G の正規部分群 N に対して，G/N がアーベル群であるためには，$D(G) \subset N$ であることが必要十分である．

(3) G が単位群でない可解群ならば，$D(G) \subsetneq G$ が成り立つ．

定理 10.6　$n \geq 5$ ならば，n 次交代群 A_n および n 次対称群 S_n は可解群ではない．