§11. 補足

定義　群 G_1, G_2 に対して，直積集合 $G_1 \times G_2$ の 2 元 (x, y), (x', y') の積を

$$(x, y)(x', y') = (xx',\, yy')$$

により定義すれば，$G_1 \times G_2$ は群となる． これを G_1, G_2 の直積という．

命題 11.1　G_1, G_2 を群とすると，ふたつの単射準同型

$$\begin{aligned} G_1 &\longrightarrow G_1 \times G_2, \qquad x \mapsto (x, 1), \\ G_2 &\longrightarrow G_1 \times G_2, \qquad y \mapsto (1, y) \end{aligned}$$

が自然に定義され，どちらの像も $G_1 \times G_2$ の正規部分群となる．

定理 11.2　群 G とその正規部分群 H_1, H_2 に対して，次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i) $G = H_1 H_2$ であって，G の元を H_1, H_2 の元の積として表わす仕方は一意的である（すなわち，任意の $a_1, b_1 \in H_1$, $a_2, b_2 \in H_2$ について $a_1 a_2 = b_1 b_2$ ならば $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$）．

(ii) $G = H_1 H_2$ かつ $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ が成り立つ．

(iii) 写像 $H_1 \times H_2 \to G,\ \ (a, b) \mapsto ab$ 　は同型写像である．

注意　命題 11.1 および定理 11.2 は，2 個より多い場合に自然に拡張される．

定理 11.3 (有限生成アーベル群の基本定理)　有限生成アーベル群は，有限個の巡回群の直積である． すなわち，アーベル群 G が有限集合によって生成されるならば，有限個の $\mathbb{Z}$ と有限個の有限巡回群 $C_1, \cdots, C_m$ の直積

$$\underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{r} \times C_1 \times \cdots \times C_m$$

と同型である（$r, m \geq 0$）． とくに，G が有限群ならば，$r = 0$ であり，G は有限個の有限巡回群の直積に同型である．

定義　G を位数 n の有限群する．素数 p に対して $p^s m = n$ かつ p, m は互いに素とする．すなわち，n は p^s で割り切れるが p^{s+1} では割り切れないとする．このとき，G の部分群で位数 p^s を持つものを，G のシロー p 部分群という．

定理 11.4 (シロー)　有限群 G とその位数を割る素数 p に対して次が成り立つ．

(1) p^r が G の位数の約数ならば，G は位数 p^r の部分群を持つ．とくに，G のシロー p 部分群は少なくともひとつ存在する．

(2) G の p べき位数の部分群に対して，それを含むシロー p 部分群が存在する．

(3) G のシロー p 部分群は互いに “共役” である．すなわち，S, T がどちらも G のシロー p 部分群ならば，$a^{-1}Sa = T$ をみたす $a \in G$ が存在する．

(4) G のシロー p 部分群の個数 l は，合同式 $l \equiv 1 \pmod p$ をみたす．