§2. イデアル

★ これ以降，とくにことわらない限り，

可換環といえば単位的可換環

のことをさすこととする．

定義 R を可換環とし，I をその空でない部分集合とする．

(I1) I は R の加法群の部分群，すなわち，任意の $a, b \in I$ に対して $a - b \in I$,

(I2) 任意の $a \in I$ と任意の $r \in R$ に対して $ra \in I$,

がみたされるとき，I を**イデアル**という．

定義 可換環 R の部分集合 S に対して，S を含む R の最小のイデアルを S で**生成**されるイデアルといい，(S) で表す． $S = A \cup B$ のとき (S) を (A, B) と書くことが多い． $S = \{a_1, \cdots, a_n\}$ のとき (S) を，$(a_1, \cdots, a_n)$ と略記し，$a_1, \cdots, a_n$ で生成されるイデアルという． ただ一つの元で生成されるイデアルを**単項イデアル**という．

命題 2.1 可換環 R の元 a, b について次が成り立つ．

(1) $(a) \subset (b) \iff b|a.$

(2) $(a) = R \iff a \in R^\times.$ とくに $R = (1).$

(3) R が整域ならば，$(a) = (b) \iff a = bu$ をみたす $u \in R^\times$ が存在する．

定義 可換環 R のイデアル I, J に対して，**和** $I + J$ を

$$I + J = \{\ a + b \mid a \in I,\ b \in J\ \}$$

によって定める．

命題 2.2 可換環 R のイデアル I, J に対して，$I + J = (I, J)$ が成り立つ． すなわち，和 $I + J$ は，$I \cup J$ で生成される R のイデアルに一致する．

定義　可換環 R のイデアル I, J に対して，**積** IJ を

$$IJ = (\{\ ab \mid a \in I,\ b \in J\ \})$$

によって定める．

命題 2.3　I, J を可換環 R のイデアルとすると，$IJ \subset I \cap J$ が成り立つ．さらに，もし $(I, J) = (1)$ ならば，$IJ = I \cap J$ が成り立つ．

定義　I を可換環 R のイデアルとする．R の加法群としての I による剰余群 R/I には自然に積が定義され，それにより R/I は可換環となる．それを R の I による**剰余環**という．$a, b \in R$ の R/I が同じ剰余類に属するとき（すなわち $a - b \in I$ のとき）

$$a \equiv b \pmod{I}$$

と書く．

命題 2.4　R を可換環，S を単位的環，$f : R \to S$ を準同型写像とする．

(1) $\operatorname{Im} f$ は S の可換部分環である．

(2) $\operatorname{Ker} f$ は R のイデアルである．

定理 2.5 (準同型定理)　R を可換環，S を単位的環とする．準同型写像 $f : R \to S$ に対して，同型写像

$$\tilde{f} : R/\operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Im} f$$

が存在して，$f = \tilde{f} \circ \nu$ が成り立つ．ただし，

$$\nu : R \longrightarrow R/\operatorname{Ker} f$$

は自然な全射である．