§3.　既約元，素元，素イデアル，極大イデアル

定義　R を可換環とし，$a, b \in R$ とする．$a = bu$ をみたす $u \in R^\times$ が存在するとき，a は b と**同伴**であるという．

補題 3.1　可換環 R において，“同伴”は同値関係である．また $a \in R$ に対して，a が単元 (すなわち $a \in R^\times$) であるためには，a と 1 が同伴であることが必要十分である．

定義　R を可換環とし，p を単元でも 0 でもない R の元とする．任意の $a \in R$ について，$a|p$ ならば a は $1, p$ のどちらかに同伴であるとき，p は**既約**であるという．既約でないとき**可約**であるという．

定義　R を可換環とし，p を単元でも 0 でもない R の元とする．任意の $a, b \in R$ について，$p|ab$ ならば「$p|a$ または $p|b$」であるとき，p は**素**であるという．

注意　既約な元，可約な元，素な元を，それぞれ**既約元**，**可約元**，**素元**ともいう．

命題 3.2　整域においては，素元ならば既約元である．

定理 3.3　可換環 R の $(1) = R$ でないイデアル P について，次は同値である．

(i) $a, b \in R$ が $ab \in P$ をみたすならば，$a \in P$ または $b \in P$.

(ii) R のイデアル I, J が $IJ \subset P$ をみたすならば，$I \subset P$ または $J \subset P$.

(iii) R/P は整域である．

定義　前定理の性質をもつイデアル P を R の**素イデアル**という．

命題 3.4　可換環 R の元 p について，p が素元であるための必要十分は，単項イデアル (p) が (0) でない素イデアルであることである．

定理 3.5　可換環 R の $(1) = R$ でないイデアル M について，次は同値である．

(i) R のイデアル I が $M \subset I \subset R$ をみたすならば，$I = M$ または $I = R$.

(ii) R/M は体である．

定義　前定理の性質をもつイデアル M を R の**極大イデアル**という．