§4. PID

定義　すべてのイデアルが単項である整域を**単項イデアル整域** (**PID**) という.

定理 4.1　$\mathbb{Z}$ は PID である.

定理 4.2　R を PID とすると，$0 \neq p \in R$ について，次の (i)–(iv) は同値である.

(i) p は既約元である.

(ii) p は素元である.

(iii) (p) は素イデアルである.

(iv) (p) は極大イデアルである.

命題 4.3　可換環 R の (1) でない任意のイデアル I に対して，I を含む極大イデアル M が存在する.

系 4.4　R を PID とすると，単元でない任意の $a \in R$ に対して，$p|a$ をみたす素元 p が存在する.

補題 4.5　R を PID とする．R の元の無限列 $\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$ で,

$$(a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (a_n) \subsetneq (a_{n+1}) \subsetneq \cdots$$

をみたすものは存在しない.

定理 4.6　R を PID とする．R の 0 でも単元でもない任意の元 a は，有限個の素元の積

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r, \qquad p_i \text{ は素元}$$

として表わすことができ，素イデアル $(p_1), (p_2), \cdots, (p_r)$ は順序を無視すれば一意的に定まる.

定義　次の性質をみたす整域 R を**一意分解整域** (**UFD**) という;

「R の 0 でも単元でもない任意の元 a は，有限個の既約元の積

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r, \qquad p_i \text{ は既約元}$$

として表わすことができ，単項イデアル $(p_1), (p_2), \cdots, (p_r)$ は順序を無視すれば一意的に定まる.」

定理 4.7　PID ならば UFD である.