§5. 直和，剰余定理，商体

定義 R_1, R_2 を環とする． 直積集合 $R_1 \times R_2$ は

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \quad (a,b)(c,d)=(ac,\,bd)$$

で定義される和，積により環となる． これを $R_1 \oplus R_2$ と書き，R_1, R_2 の**直和**という． 環 R について，$R \oplus R$ を R^2 と書くことが多い． $R^n = \underbrace{R \oplus \cdots \oplus R}_{n}$ も同様．

定理 5.1 R を可換環，I, J をそのイデアルで $I+J=(1)$ をみたすものとする． このとき，自然な全射 $R \longrightarrow R/I$, $R \longrightarrow R/J$ から定まる写像

$$R \longrightarrow (R/I) \oplus (R/J)$$

は全射準同型であり，核は $I \cap J$ で与えられる． また，

$$R/(I \cap J) \simeq (R/I) \oplus (R/J)$$

が成り立つ．

定理 5.2 (中国の剰余定理) R を可換環，I, J をそのイデアルで $I+J=(1)$ をみたすものとする． このとき，任意の $a, b \in R$ に対して，

$$x \equiv a \pmod{I}, \qquad x \equiv b \pmod{J}$$

をみたす $x \in R$ が存在する． さらに，このような $x \in R$ は $I \cap J$ を法として一意的に定まる．

定理 5.3 整域 R に対して，次の (Q1), (Q2) をみたす体 K が存在する．

(Q1) 単射準同型写像 $\iota : R \to K$ が存在する．

(Q2) K の任意の元は $\operatorname{Im}\iota$ の 2 元の商として書ける． すなわち，

$$\forall \alpha \in K \text{ に対して，} \exists a, b \in R \text{ s.t. } \alpha = \frac{\iota(a)}{\iota(b)}.$$

定義 前定理のような体 K を，整域 R の**商体**という． R と $\operatorname{Im}\iota$ を同一視して，R を K の部分環とみなすことが多い．

定理 5.4 R を整域とし，その商体が単射準同型写像 $\iota : R \to K$ によって与えられているとする． このとき，R から体 L への単射準同型写像 $\kappa : R \to L$ に対して，準同型写像 $\lambda : K \to L$ で $\lambda \circ \iota = \kappa$ をみたすものが一意的に存在する．

定理 5.5 整域 R に対して，その商体は同型を除いて一意的に存在する．