§6. 多項式環

定義 可換環 R の元を係数とする多項式全体は可換環となる． これを R 上の**多項式環**といい，$R[X]$ で表す． X を**変数**または**不定元**という．

多項式環の厳密な定義は（たとえば）以下の通り（読まなくてもよい）：

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく． 可換環 R に対して，$\mathbb{N}_0$ から R への写像 φ で，有限個の $n \in \mathbb{N}_0$ を除いて $\varphi(n) = 0$ となるもの全体を S とおく:

$$S = \{\ \varphi \mid \varphi : \mathbb{N}_0 \to R,\ \ \exists N \in \mathbb{N}_0 \ \text{ s.t. } N < n \Rightarrow \varphi(n) = 0\ \}.$$

ここで，$\varphi, \psi \in S$ に対して，その和 $\varphi + \psi$，積 $\varphi\psi$ を

$$(\varphi+\psi)(n) = \varphi(n) + \psi(n), \qquad (\varphi\psi)(n) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(k)\psi(n-k)$$

と定めれば，S は可換環となる． いま，$a \in R$ に対して，

$$\gamma_a(n) = \begin{cases} a & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

で定まる $\gamma_a \in S$ を対応させる写像 $R \to S$ は単射準同型である． そこで，a と γ_a を同一視して，$R \subset S$ とみなすことにする． さらに，写像 $X : \mathbb{N}_0 \to R$ を

$$X(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases}$$

で定義すると，$X \in S$ であり，k 個をかけ合わせたもの $X^k = \underbrace{X \cdots X}_{k}$ は

$$X^k(n) = \begin{cases} 1 & (n = k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases}$$

をみたすことが確かめられる． これらのことから，$\varphi \in S$ が $a_0, a_1, \cdots, a_N \in R$ によって

$$\varphi(k) = \begin{cases} c_k & (0 \leq k \leq N) \\ 0 & (N < k) \end{cases}$$

で与えられれば，

$$\varphi = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots + c_N X^N = \sum_{k=0}^{N} c_k X^k$$

と表すことができる． S を R 上の多項式環といい $R[X]$ で表し，X をその変数または不定元という．$R[X]$ の元を R 上の多項式という．

（厳密な定義終わり ―読まなくていいってば）

定義　可換環 R 上の多項式 $f \in R[X]$ が

$$f = c_0 + c_1 X + \cdots + c_n X^n = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k, \qquad (c_k \in R,\ c_n \neq 0)$$

で与えられるとき，n を f の**次数**といい $\deg f$ で表す．また，c_k を k 次の係数といい，とくに c_n を**主係数**という．主係数が *1* である多項式は**モニック**であるといわれる．さらに，便宜上 $\deg 0 = -\infty$ とする．ここで $-\infty$ は，任意の $n \geq 0$ に対して，

$$-\infty < 0, \qquad n + (-\infty) = (-\infty) + n = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

をみたすものとする．

命題 6.1　可換環 R 上の多項式 $f, g \in R[X]$ に対して次が成り立つ．

(1) $\deg f = 0 \iff f \in R$ かつ $f \neq 0$.

(2) $\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$.

(3) $\deg f > \deg g$ ならば，$\deg(f+g) = \deg f$.

(4) $\deg(fg) \leq \deg f + \deg g$.

(5) f, g どちらかの主係数が零因子でないならば，$\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

系 6.2　整域 R 上の多項式 $f, g \in R[X]$ に対して，$\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

命題 6.3　R が整域ならば，その上の多項式環 $R[X]$ も整域であり，さらに

$$R[X]^\times = R^\times$$

が成り立つ．

定理 6.4 (割り算の原理)　可換環 R 上の多項式 $f, g \in R[X]$ に対し，g の主係数が単数ならば，

$$f = qg + r, \qquad \deg r < \deg g$$

をみたす $q, r \in R[X]$ がただ一組存在する．

定理 6.5　体 K 上の多項式環 $K[X]$ は PID である．