§8.　既約多項式

定義　R を整域とし，f を $\deg f \geq 1$ である R 上の多項式とする．

$$f = gh, \qquad 0 < \deg g,\ \deg h < \deg f$$

のような $g, h \in R[X]$ が存在するとき，f を**可約多項式**という．可約多項式でない f を**既約多項式**という．

命題 8.1　K を体とする．$0 \neq f \in K[X]$ が既約多項式であることは次のどれとも同値である．
(i) f は既約元　(ii) f は素元　(iii) (f) は素イデアル　(iv) (f) は極大イデアル

定理 8.2　R を PID とし，K をその商体とする．$f \in R[X]$ に対して，f が K 上の既約多項式であるためには，f が R 上の既約多項式であることが必要十分である．

定義　R を整域とし，p をその素元とする．R 上の多項式

$$f = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k = c_0 + c_1 X + \cdots + c_{n-1} X^{n-1} + c_n X^n$$

が次の (E1), (E2), (E3) をみたすとする．

(E1)　c_n は p の倍数ではない．

(E2)　$c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ は p の倍数である．

(E3)　c_0 は p^2 の倍数ではない．

このとき，f を素元 p に関する**アイゼンシュタイン多項式**という．

定理 8.3　R を整域とし，$f \in R[X]$ とする．R の素元 p が存在して，f が p に関するアイゼンシュタイン多項式ならば，f は既約多項式である．

定理 8.4 (アイゼンシュタイン)　R を PID とし，K をその商体とする．$f \in R[X]$ が R のある素元に関するアイゼンシュタイン多項式ならば，f は K 上の既約多項式である．