代数 I　中間試験問題　June 11, 2013　(中野 伸)

- 裏面の定義集を参考にしてもよい.

[1]　S を群 G の空でない部分集合とするとき，以下を証明せよ.

(1) $Z(G)$ は G の正規部分群である.

(2) S が生成する G の部分群を H とすると，~~$N(S) = N(H)$~~ $N(S) \subset N(H)$ が成り立つ.（2014.5.27 修正： $N(S) \supset N(H)$ はダメかも…反例あるかな？）

[2]　以下は，

『 $A, B, A \cup B$ が群 G の部分群ならば，$A \subset B$ または $B \subset A$ が成り立つ 』ことの背理法による証明である. $\boxed{\text{あ}}$, $\boxed{\text{い}}$, $\boxed{\text{う}}$ をうめて，さらに $\boxed{\text{え}}$ を加えて証明を完成させよ.

【証明】　もし，結論が成り立たないならば，$A \not\subset B$ かつ $B \not\subset A$ である. $A \not\subset B$ から $\boxed{\quad\text{あ}\quad}$ をみたす α が存在し，$B \not\subset A$ から $\boxed{\quad\text{い}\quad}$ をみたす β が存在することがわかる. そこで，$\gamma = \alpha\beta$ とおくと，$\boxed{\quad\text{う}\quad}$ より $\gamma \in A \cup B$，したがって $\gamma \in A$ または $\gamma \in B$ となる. $\gamma \in A$ の場合，$\beta = \alpha^{-1}\gamma$ を考えると，$\boxed{\qquad\qquad\text{え}\qquad\qquad}$【証明終】

[3]　３次対称群 S_3 の類等式について説明せよ.

[4]　H を群 G の部分群とし，$g \in G$ とする. g の位数と $(G : H)$ が互いに素であるとき，以下の問いに答えよ.

(1) $H \lhd G$ ならば $g \in H$ であることを示せ.

(2) $H \lhd G$ でないとき，必ずしも $g \in H$ とはならないことを，例をあげて説明せよ.（ヒント: $G = S_3$ で反例が作れる….）

[5]　群 G について，$D(G) \subset Z(G)$ ならば，任意の $x, y, z \in G$ に対して

$$[x, yz] = [x, y][x, z]$$

が成り立つことを示せ.

定義 1. 群 G の部分集合 S,T および $a \in G$ に対して，ST, S^{-1}, aS, Sa を次のように定める．

$$ST = \{\, st \mid s \in S,\, t \in T \,\}, \quad S^{-1} = \left\{\, s^{-1} \mid s \in S \,\right\},$$
$$aS = \{\, as \mid s \in S \,\}, \quad Sa = \{\, sa \mid s \in S \,\}.$$

定義 2. 群 G の元の個数 $|G|$ を G の**位数**という． また $a \in G$ に対して a が生成する部分群の位数を a の位数という．

定義 3. 群 G の空でない部分集合 S に対して，

$$Z(S) = \{\, x \in G \mid \text{すべての } s \in S \text{ に対して } xs = sx \,\},$$
$$N(S) = \{\, x \in G \mid xS = Sx \,\}$$

をそれぞれ S の**中心化群**，**正規化群**という． $Z(G)$ を G の**中心**という． $a \in G$ に対して，$Z(\{a\})$ を $Z(a)$ と略す．

定義 4. 群 G の部分群 N が**正規部分群**であるとは，すべての $x \in G$ に対して

$$xNx^{-1} \subset N$$

をみたすことである． このとき，$N \lhd G$ または $G \rhd N$ と書く．

定義 5. H が群 G の部分群のとき，

$$a \sim b \iff b \in aH \qquad (a, b \in G)$$

によって定まる G の同値関係 $\sim$ による G の同値類集合を G/H で表わす． G/H の元を G の H による**左剰余類**という． $H \setminus G$ および**右剰余類**も類似の方法で定義される． G/H の元の個数を H の**指数**といい，$(G:H)$ で表わす．

定義 6. 群 G の正規部分群 N に対して G/N は自然に群の構造をもつ． これを G の N に関する**剰余群**という．

定義 7. 群 G の 2 元 a, b が**共役**であるとは，$b = xax^{-1}$ をみたす $x \in G$ が存在することである． a と共役な元全体を $K(a)$ と書く．

定義 8. 有限群 G について，中心 $Z(G)$ に属さず，互いに共役でない $a_1, \cdots, a_t \in G$ が存在して

$$G = Z(G) \cup K(a_1) \cup \cdots \cup K(a_t) \qquad (\text{共通部分なし})$$

と書くことができる． このとき，

$$|G| = |Z(G)| + |K(a_1)| + \cdots + |K(a_t)|$$

を G の**類等式**という．

定義 9. 群 G の 2 元 a, b に対して，

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$$

とおき，a, b の**交換子**という． G の交換子全体の集合で生成される G の部分群を G の**交換子群**といい，$D(G)$ で表わす．

$$D_0(G) = G, \qquad D_i(G) = D(D_{i-1}(G)) \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

とするとき，

$$G = D_0(G) \supset D_1(G) \supset D_2(G) \supset \cdots$$

を G の**交換子群列**という． $D_n(G) = \{e\}$ をみたす自然数 n が存在するとき，G は**可解群**であるという．