代数 I　試験問題 July 25, 2013 (中野 伸)

- 解答は，結論だけでなく結論に至る考え方を書くこと．
- 裏面の定義集を参考にしてもよい．

$\boxed{1}$ 群 G のすべての元 g について，$g^2 = e$ が成り立つという． このとき G はアーベル群であることを示せ．

$\boxed{2}$ 整数係数の多項式環 $\boldsymbol{Z}[X]$ のイデアル $I = (X^2+4,\ X)$ について，以下の問いに答えよ．

[1] $X + 2 \notin I$ を示せ．

[2] I が素イデアルかどうか判定せよ．

[3] I は単項イデアルかどうか判定せよ．

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{Z}[\sqrt{6}]$ において，次を示せ．

[1] $5 - 2\sqrt{6}$ は単元である．

[2] $\sqrt{6}$ は既約元である（$\Longleftarrow$ 間違い！ 下記★参照）．

[3] $\sqrt{6}$ は素元ではない．

★ だって $\sqrt{6} = (2+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})$ で，$2+\sqrt{6}$ も $3-\sqrt{6}$ も単元じゃないもん．

$\boxed{4}$ R を単位元 1 をもつ可換環とする． 以下の各命題について，正しいものは証明し，正しくないものには反例をあげよ．

[1] R の単元全体は積についてアーベル群となる．

[2] R の零因子全体は和についてアーベル群となる．

[3] (0) が極大イデアルならば，R は体である．

定義 1. R を単位元 1 をもつ環とする． $a \in R$ に対し，

$$ab = ba = 1$$

をみたす $b \in R$ が存在するとき，a を**単元**という． このとき b を a の**逆元**といい，a^{-1} で表す.

定義 2. R を環とする． $a \in R$ に対し，

$$ab = 0 \quad \text{または} \quad ba = 0$$

をみたす $0 \neq b \in R$ が存在するとき，a を**零因子**という.

定義 3. 単位元をもち，零因子が 0 のみの可換環を**整域**という.

定義 4. R を整域とする． 0 でも単元でもない $p \in R$ は，次の性質をもつとき**素元**という;

『$a, b \in R$ について，p が ab の約数ならば，p は a または b の約数である.』

定義 5. R を整域とする． 0 でも単元でもない $p \in R$ は，次の性質をもつとき**既約元**という;

『$a, b \in R$ について，$p = ab$ ならば，a または b は単元である.』

定義 6. R を単位元をもつ可換環とする． R のイデアル P は，次の性質をもつとき**素イデアル**という;

『$a, b \in R$ について，$ab \in P$ ならば，$a \in P$ または $b \in P$ である.』

定義 7. R を単位元をもつ可換環とする． R のイデアル M は，次の性質をもつとき**極大イデアル**という;

『R のイデアル I について，$M \subset I \subset R$ ならば，$I = M$ または $I = R$ である.』