代数 I　試験問題 July 24, 2014　(中野 伸)

[1]　A, B を群 G の部分群とし，p, q を相異なる素数とする．もし，A の位数が p で，B の位数が q ならば，$A \cap B = \{e\}$ であることを証明せよ．

[2]　6 つの可換環

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}[\sqrt{8}], \quad \mathbb{Q}[x]/(x^2-9)$$

について，以下の問に答えよ．ただし，$\mathbb{Q}[x]$ は有理数係数の多項式環である．

(1) 整域でないものをすべてあげよ．

(2) 前問であげたそれぞれについて 0 でない零因子の例を提示せよ．

[3]　$R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ とそのイデアル $P = (2, 1 + \sqrt{-5})$ について，以下を示せ．

(1)　R の単数は $1, -1$ のみである（単数とは単元のことである）．

(2)　2 は素元ではない．

(3)　$P^2 = (2)$.

(4)　P は単項イデアルではない．

[4]　多項式環 $\mathbb{Z}[x]$ のイデアル

$$I = (x+3), \quad J = (4,\, x-1), \quad K = (2,\, x-1)$$

について，以下を証明せよ．

(1)　$I \subset J$ かつ $I \neq J$.

(2)　J は素イデアルではない．

(3)　$J \subset K$ かつ $J \neq K$.

(4)　$\mathbb{Z}[x]/K$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型である．（ヒント：写像 $\mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ f(x) \mapsto f(1) + 2\mathbb{Z}$ に準同型定理を適用せよ.）