代数 I　試験問題 July 28, 2015　(中野 伸)

- 解答は，結論だけでなく結論に至る考え方を書くこと．
- [3]-(4), [4]-(3), [4]-(4) は，やや難問かもしれない．

[1]　G を乗法群とし単位元は 1 であるとする．以下の命題を示せ．

(1) G が位数 n の有限群ならば，任意の $a \in G$ に対して $a^n = 1$ である．

(2) G がアーベル群で，$a, b \in G$ とする．a, b が互いに素な位数 s, t を持つならば，ab の位数は st である．

[2]　R を可換環とし，S をその部分環とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) P が R の素イデアルならば，$P \cap S$ は S の素イデアルであることを示せ．

(2) M が R の極大イデアルであっても，$M \cap S$ は S の極大イデアルとは限らない．そのような例をあげよ．

[3]　多項式環に関する以下の問いに答えよ．

(1) $X^5 + 5X + 9$ が $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ において可約多項式か既約多項式か判定せよ．

(2) $\mathbb{Z}[X]$ において $X^5 + 5X + 9$ は既約多項式であることを示せ．

(3) $\mathbb{Q}[X]$ のイデアル $I = (X^2 - X,\, X^2 + 2X - 3)$ について，$I = (f(X))$ をみたすモニックな多項式 $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ を求めよ．

(4) $\mathbb{Z}[X]$ のイデアル $J = (X^2 - X,\, X^2 + 2X)$ について，$(3X) \subset J \subset (X)$ が成り立つことを示し，さらに，J は単項でないことを証明せよ．

[4]　自然数 m に対して，可換環 $R_m = \left\{ a + b\sqrt{-m} \,|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) R_1 と R_5 の単元群をそれぞれ求めよ．

(2) R_5 において，2 は既約元であることを示せ．

(3) R_5 において，イデアル $(2,\, 1 + \sqrt{-5})$ は単項でないことを証明せよ．

(4) R_3 において，5 は素元であることを証明せよ．