代数 I 中間試験問題

2016 年 6 月 14 日

問題 1. (1) 群 G の位数が m であって, かつ位数 m の元を持たない例を挙げよ.

(2) 3 次対称群 S_3 の部分群 H_1, H_2 で, H_1H_2 が群とならない例を挙げよ.

(3) 群準同型 $f: G \longrightarrow G'$ について, $\mathrm{Im}\,(f)$ が G' の正規部分群とならない例を挙げよ.

問題 2. 群 G の元 a, b が $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$ かつ $G = \langle a, b \rangle$ を満たすとする.

(1) G はアーベル群であることを示せ.

(2) G は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型であることを示せ.

問題 3. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \mid \det(A) \neq 0\}$ (ただし $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の元を成分とする $(2,2)$ 行列全体) とおく.

$f: \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times$, $A \mapsto \det(A)$ とするとき,

(1) f は全射群準同型であることを示せ.

(2) $\mathrm{Ker}\,(f)$ の位数を求めよ.

(3) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ の位数を求めよ.

問題 4. $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし, $G = \langle A, B \rangle$ とする. ただし, i は虚数単位.

(1) $A^4 = E$, $A^2 = B^2$, $BA = A^3B$ となることを示せ.

(2) G の全ての元を求めよ.

(3) $G/\langle AB \rangle$ の完全代表系を 1 組求めよ.

(4) 中心 $Z(G)$ の元を全て求めよ.

(5) G を共役類の合併集合で表わせ.

問題 5. 位数 8 の非可換群 G の中心 $Z(G)$ の位数は 2 であることを示せ.