代数 I　試験問題 July 26, 2016　(中野 伸)

- 解答は，結論だけでなく結論に至る考え方も書くこと．

[1]　乗法群 G について，以下のそれぞれの問いに答えよ．

(1) 群論におけるラグランジュの定理を述べ，それを用いて，『G の位数が 2016 ならば，G は位数 5 の元を持たない』ことを証明せよ．

(2) G はアーベル群であるとする． $\alpha, \beta \in G$ の位数がそれぞれ $7, 26$ であるとき，$\alpha\beta^{13}$ の位数を求めよ．

[2]　1 をもつ可換環 R の 2 元 a, b について，次をそれぞれ示せ．

(1) $(a, b) = (a)$ ならば，$a | b$ が成り立つ．

(2) $(a, b) = R$ ならば，$(a) \cap (b) \subset (ab)$ が成り立つ．

[3]　多項式環のイデアルに関する次の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{Q}[X]$ のイデアル $(X^5 + 7X + 2016)$ は極大イデアルであることを示せ．

(2) $\mathbb{Z}[X]$ において $(X+1, X-1) = (2, X+1)$ を示し，これが単項かどうか判定せよ．

[4]　可換環 $R = \left\{ a + b\sqrt{-10} \,|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ を考える． 以下の問いに答えよ．

(1) $R^{\times} = \{1, -1\}$ であることを示せ．

(2) $\sqrt{-10}$ が 2 の倍元でないことを示し，それを用いて 2 が R の素元でないことを導け．

[5]　多項式の既約性に関する以下の問いに答えよ．

(1) $f(X)$ を整域 R 上の既約多項式とすると，$f(1-X)$ も R 上の既約多項式であることを証明せよ．

(2) $3X^5 - 108X^3 + 18X^2 - 54X - 36$ は $\mathbb{Q}$ 上の既約多項式かどうか判定せよ．