代数 I　中間試験問題 June 6, 2017　(中野 伸)

- 答案には，結論だけでなく結論に至る考え方も**簡潔**に書くこと.

[1]　3 次対称群

$$S_3 = \langle \sigma,\ \tau \rangle = \left\{ e,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \tau,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau \right\}, \quad \sigma = (1\ 2\ 3), \quad \tau = (1\ 2)$$

およびその部分群 $N = \langle \sigma \rangle$，$H = \langle \tau \rangle$ について以下の問いに答えよ.

(1) N の指数 $(S_3 : N)$ を求めよ.

(2) S_3 の H に関する左剰余類分解を与えよ.

(3) S_3 の位数 2 の元をすべて求めよ.

[2]　G を群とする.

(1) G の元 x の位数が 126 であるとき，x^{60} の位数を求めよ.

(2) G の単位元でない任意の元の位数が 2 であるという．このとき G はアーベル群であることを示せ.

[3]　群 G に対して，集合 $\{ xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \}$ で生成される G の部分群を $D(G)$ で表す（G の交換子群という）．以下の命題を証明せよ.

(1) $D(G)$ は G の正規部分群である.

(2) A をアーベル群とし，$f : G \to A$ を準同型写像とすると，$D(G) \subset \operatorname{Ker} f$ が成り立つ.

[4]　有理数を成分とする 2 次正則行列全体が作る乗法群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の部分群

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, d \in \mathbb{Q}^\times,\ b \in \mathbb{Q} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} s & t \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{Q}^\times,\ t \in \mathbb{Q} \right\}$$

および，写像 $f : G \to \mathbb{Q}^\times,\ A \mapsto \det(A)$ を考える．G, N が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ の部分群であることは認めて，以下の命題を証明せよ.

(1) f は全射準同型である.

(2) $\operatorname{Ker} f \subset N$ が成り立つ.

(3) N は G の正規部分群であり，剰余群 G/N は $\mathbb{Q}^\times$ と同型である.