代数 I　試験問題　July 25, 2017　(中野 伸)

- 答案には，結論だけでなく結論に至る考え方を**簡潔**に書くこと．

[1]　以下の問いに答えよ．

(1) 巡回群の部分群はすべて巡回群であることを証明せよ．

(2) 多項式環 $\mathbb{Q}[X]$ において，イデアル $I = (X^2 + 5X + 6)$ を含む極大イデアルをひとつ求めよ．

(3) PID(単項イデアル整域) でない整域の例をあげ，さらに，その単項でないイデアルの例をあげよ（単項でないことの証明もせよ）．

[2]　$R = \left\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ とおく．R の単元群 $R^\times$ に関する以下の問いに答えよ．

(1) $R^\times$ は無限群であることを示せ．

(2) $H = \{ \alpha \in R^\times \mid \alpha > 0 \}$ とおくと，H は $R^\times$ の指数 2 の部分群であることを示せ．

[3]　自数数 $n \geq 2$ に対して $\mathbb{Z}$ 上の多項式 $f_n(X) = (X-3)\cdots(X-3^n)$ を考える;

$$f_2(X) = (X-3)(X-9), \quad f_3(X) = (X-3)(X-9)(X-27), \quad \ldots.$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 $n \geq 2$ に対して $f_n(X) + 3$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ．

(2) すべての自然数 $n \geq 2$ に対して $f_n(X) + 2$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ．

(3) $f_3(X) + a$ が $\mathbb{Q}$ 上可約であるような自然数 a をひとつ見つけよ．

[4]　可換環 R のイデアル I に対して

$$\sqrt{I} = \{ a \in R \mid a^n \in I \text{ をみたす自然数 } n \text{ が存在する} \}$$

とおく．

(1) $\sqrt{I}$ は R のイデアルであることを示せ．

(2) $R = \mathbb{Z}$，$I = (24)$ のとき，$\sqrt{I} \subset (2)$ を示せ．