

代数I

まとめのレポート課題 その1

(中野 伸)

課題提示：2020年7月29日 10:50

提出〆切：2020年7月31日 18:00

注意: 証明問題以外でも, 答えだけでなく, 答えに至る考え方等を書くこと.

① $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-37}] = \{a + b\sqrt{-37} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ とする.

[1] \mathbb{Z} における素数 $p < 37$ (つまり $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31\}$)

は, R の既約元であることを示せ.

[2] $1 + \sqrt{-37}$ は R の素元ではないことを示せ.

[3] $1 + \sqrt{-37}$ を含む極大イデアルをひとつ求めよ.

代数I

まとめのレポート課題 その2

(中野 伸)

課題提示：2020年7月29日 10:50

提出〆切：2020年7月31日 18:00

注意: 証明問題以外でも, 答えだけでなく, 答えに至る考え方等を書くこと.

2] 以下の問いに答えよ.

[1] 有理数体上の多項式環 $\mathbb{Q}[X]$ のイデアル

$$I = (X^3 + 1, X^2 - X - 2)$$

に対して, $I = (f(X))$ をみたす $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ を求めよ.

[2] 可換環 R の部分集合

$$N = \{a \in R \mid a^n = 0 \text{ をみたす自然数 } n \text{ が存在する}\}$$

は R のイデアルであることを示せ.

代数I

まとめのレポート課題 その3

(中野 伸)

課題提示：2020年7月29日 10:50

提出〆切：2020年7月31日 18:00

- 3 G を群とし、 H をその部分群とする。
- [1] $a, b \in G$ に対して、関係 $a \sim b$ を $a^{-1}b \in H$ によって定めると、 \sim は同値関係であることを示せ。
- [2] G が位数 273 の有限群で、 H の位数が 91 より大きければ、 $G = H$ であることを示せ。
- [3] 指数 $(G : H) = 2$ ならば、 H は G の正規部分群であることを示せ。

代数I

まとめのレポート課題 その4

(中野 伸)

課題提示：2020年7月29日 10:50

提出〆切：2020年7月31日 18:00

注意: 証明問題以外でも, 答えだけでなく, 答えに至る考え方等を書くこと.

- 4] 有理数を成分とする2次正則行列全体が作る乗法群 $GL(2, \mathbb{Q})$ の部分集合

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{Q}^\times, b \in \mathbb{Q} \right\}, \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}^\times, b \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{Q}^\times \right\}, \quad (\mathbb{Q}^\times \text{ は } 0 \text{ でない有理数全体の作る乗法群})$$

を考える.

[1] G は $GL(2, \mathbb{Q})$ の部分群であることを示せ.

[2] N は G の正規部分群であり, H はそうではないことを示せ.

[3] $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in G$ に対して, $A = BC$ をみたす $B \in H, C \in N$ を一組求めよ.