代数 I　中間試験問題 June 8, 2022　(中野 伸)

- 答案には，結論だけでなく結論に至る考え方を**簡潔**に書くこと．

[1]　$R = \left\{ \dfrac{n}{6^k} \;\middle|\; n, k \in \mathbb{Z},\ \text{ただし } k \geq 0 \right\}$ とおくとき，以下の命題を示せ．

(1) R は $\mathbb{Q}$ の部分環である．

(2) $\dfrac{8}{9}$ は R の可逆元である．

(3) I を 5 で生成される R の単項イデアルとすると，

任意の $n, k \in \mathbb{Z}$ (ただし $k \geq 0$) に対して，$n \equiv \dfrac{n}{6^k} \pmod{I}$

が成り立つ．

[2]　多項式環 $\mathbb{Z}[T]$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\mathbb{Z}[T]$ のイデアル $(5, T)$ は単項イデアルではないことを示せ．

(2) $\mathbb{Z}[T]/(T^3)$ における $\overline{T+1}$ の逆元を求めよ．

(3) $\mathbb{Z}[T]/(3, T^2+2)$ において $\overline{T+1}$ は零因子であることを示せ．

[3]　$\mathbb{Z}[\sqrt{7}] = \{\, a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z} \,\}$ のイデアル $P = (3, 1+\sqrt{7})$, $Q = (3, 1-\sqrt{7})$ について，以下を証明せよ．

(1) $1 \in P + Q$ が成り立つ．

(2) $3 \in PQ$ が成り立つ．

(3) $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]/P$ は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と環同型である（ヒント: 写像 $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\varphi(a + b\sqrt{7}) = \overline{a-b}$ が準同型であることを確かめ，準同型定理を適用する）．

[4]　以下のそれぞれの性質を持つ可換環 R の例を一つずつあげよ．

(1) R は体ではなく，かつ可逆元全体の集合 $R^\times$ は無限集合である．

(2) R には，(0) でも極大イデアルでもない素イデアルが存在する．