代数 I　試験問題　July 27, 2022　(中野 伸)

- 答案には，結論だけでなく結論に至る考え方を**簡潔**に書くこと．

[1]　7 次対称群 S_7 の元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) σ を，互いに共通の文字を含まない巡回置換の積で表せ．

(2) σ^{27} の位数を求めよ．

(3) σ の符号 $\mathrm{sgn}\,(\sigma)$ を求めよ．

[2]　G を位数 2022 の群とするとき，以下の命題を証明せよ．

(1) G は位数 18 の部分群を持たない．

(2) G の部分群 H_1, H_2 が $|H_1| = (G : H_2)$ をみたすならば，$H_1 \cap H_2$ は単位群である．(2022 の素因数分解が $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ であることを使ってよい．)

[3]　以下の主張はどちらも一般には正しくない．それぞれについて反例をあげよ．

(1) 群 G から自分自身への写像 $f : G \to G,\ f(\sigma) = \sigma^{-1}$ は群準同型である．

(2) R が可換環 S の部分環で，M が S の極大イデアルならば，$M \cap R$ は R の極大イデアルである．

[4]　写像

$$\varphi : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \qquad \varphi((a,b)) = \overline{2a+3b}$$

は，$\underline{\text{可換環の間の環準同型ではない}}_{(\mathrm{A})}$ が，$\underline{\text{加法群の間の群準同型である}}_{(\mathrm{B})}$．
N を φ の核とする．

(1) 下線部 (A) を示せ．((B) は示さなくてよい．)

(2) $\alpha = (4,3), \beta = (7,-3) \in \mathbb{Z}^2$ に対して，2 つのコセット $\alpha + N$ と $\beta + N$ が一致するかどうか判定せよ．

(3) $\mathbb{Z}^2$ を N に関してコセット分解せよ（この問いについては，答えだけ記せばよい）．

[5]　以下の 5 個の可換環のうち，整域でないものをすべて選び，そのそれぞれに対し 0 (= 零元) でない零因子を 1 つずつあげよ（この問題については，答えだけ記せばよい）．

$$\mathbb{Z}[\sqrt{8}], \quad \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}[T]/(T^2-8), \quad \mathbb{R}[T]/(T^2-8), \quad \mathbb{C}^8 = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{8\text{ 個}}$$