代数I　中間試験問題　June 7, 2023　(中野 伸)

- 答案には，結論だけでなく結論に至る考え方を**簡潔**に書くこと．
- $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ は，それぞれ実数全体，複素数全体から 0 を除いた集合からなる乗法群である．

[1]　実数 $\mathbb{R}$ 上の 2 項演算　$a \circ b = a + b - 2ab$　について以下の問いに答えよ．

(1) 結合法則が成り立つことを検証せよ．

(2) 単位元を求めよ．

(3) $\mathbb{R}$ は演算 $\circ$ に関して群ではないことを示せ．また，$\mathbb{R}$ からある１つの元を除くと群になる．その元を求めよ．

[2]　群の元の位数に関する以下の問いに答えよ．

(1) 加法群 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の各元の位数を求めよ．

(2) $\mathbb{C}^*$ の元で，位数が 8 であるものすべてを複素数平面上に図示せよ．

(3) M, N を群とし，$m \in M$，$n \in N$ とする．m の位数が 21 で，n の位数が 14 のとき，直積群 $M \times N$ の元 (m, n) の位数を求めよ．

[3]　群の準同型写像　$f : G \to G'$　に関する以下の命題を証明せよ．ここで，e, e' はそれぞれ G, G' の単位元とする．

(1) $f(e) = e'$ が成り立つ．

(2) $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$ ならば，f は単射である．

(3) G の位数が 35，G' の位数が 76 ならば，$\mathrm{Im}(f) = \{e'\}$ である．

[4]　$\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ の部分集合

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, c, d \in \mathbb{R}, \ ad \neq 0 \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in G \, \middle| \, ad > 0 \right\}$$

について以下の問いに答えよ．

(1) G は $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ の部分群であることを示せ．

(2) H が G の正規部分群かどうか判定せよ．

(3) 準同型写像

$$g : G \longrightarrow \mathbb{R}^*, \qquad \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a}{d}$$

に準同型定理を適用すると，群の同型　$G/N \cong \mathbb{R}^*$　が得られる．このような G の部分群 N を求め，実際に，G/N は $\mathbb{R}^*$ と同型であることを示せ．ただし，g が準同型であることは認めてよい．