§3.　代数的元

この節全体を通して，L/K を体の拡大とし，$\alpha \in L$ とする．

定義 3.1　α を根とする K 上の零でない多項式が存在するとき，すなわち，

$$\exists f(X) \in K[X] - \{0\} \quad \text{s.t.} \quad f(\alpha) = 0$$

であるとき，α は K 上**代数的**であるという． K 上代数的でない元は，K 上**超越的**であるといわれる．

例 3.2　(1)　$\sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
(2)　$\dfrac{\sqrt[3]{5}+7}{1-\sqrt{2}}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
(3)　自然対数の底 e は $\mathbb{Q}$ 上超越的である（Hermite の定理 (1873)）．
(4)　円周率 π は $\mathbb{Q}$ 上超越的である（Lindemann の定理 (1882)）．

補題 3.3　α が K 上代数的ならば，以下が成り立つ．

(1)　$K[\alpha] = K(\alpha)$.

(2)　$f(\alpha) = 0$ をみたす零でない $f(X) \in K[X]$ に対して，$[K(\alpha) : K] \leq \deg f$.

(3)　$f(\alpha) = 0$ かつ $[K(\alpha) : K] = \deg f$ をみたす $f(X) \in K[X]$ が存在する．

定理 3.4　α に対して次は同値である．

(i)　α は K 上代数的である．

(ii)　$K(\alpha)/K$ は有限次拡大である．

(iii)　$K(\alpha) = K[\alpha]$ が成り立つ．

定理 3.5　α が K 上代数的であるとき，α を根にもつ $f(X) \in K[X]$ に対して次は同値である．

(i)　$f(X)$ は K 上既約である．

(ii)　$[K(\alpha) : K] = \deg f$.

(iii)　$f(X)$ の次数は最小である． すなわち，$g(X)(\neq 0) \in K[X]$ が α を根にもつならば，$\deg f \leq \deg g$.

定義 3.6 前定理のような多項式 $f(X) \in K[X]$ のうちモニックなものは一意的に定まる． これを α の K 上の**最小多項式**という．

定理 3.7 α が K 上代数的ならば，α の K 上の最小多項式が存在する．

命題 3.8 $K(\alpha)/K$ が有限次拡大で $[K(\alpha):K]=n$ ならば，

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}$$

は K 上ベクトル空間としての $K(\alpha)$ の基底である．

例 3.9 (1) $\sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は X^2-3.

(2) $1-\sqrt{5}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は X^2-2X-4.

(3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $X^3-\dfrac{1}{7}$.

(4) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $X^6-6X^4-6X^3+12X^2-36X+1$.

最後の例は，たとえば，以下を順に示すことで得られる； ただし，$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$, $f(X)=X^6-6X^4-6X^3+12X^2-36X+1$ とする．

(a) $f(\alpha)=0$ より $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] \le \deg f = 6$

(b) $\sqrt[3]{3}=\alpha-\sqrt{2}$ の両辺を 3 乗することにより，$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$

(c) $\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt[3]{3})$

(d) $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ は 2 でも 3 でも割り切れる．

(e) $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] \ge 6$

(f) (a), (e) をあわせて，$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=\deg f$

副産物として，$f(X)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であることと $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=6$ が確定する．