§4.　代数拡大

定義 4.1　L/K を体の拡大とする．L の任意の元が K 上代数的であるとき，L は K 上**代数的**であるという．また，L/K を**代数拡大**という．L が K 上代数的ないとき，L は K 上**超越的**であるといい，L/K を**超越拡大**という．

命題 4.2　有限次拡大は代数拡大である．

命題 4.3　体の拡大 L/K に対して次は同値である．

(i)　L/K は有限次拡大である．

(ii)　K 上代数的な有限個の元 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$ が存在して，$L = K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ が成り立つ．

定理 4.4　M を体の拡大 L/K の中間体とするとき，次は同値である．

(i)　L/K は代数拡大である．

(ii)　$L/M,\ M/K$ はともに代数拡大である．

定理 4.5　L/K を体の拡大とする．$\alpha, \beta \in L$ がともに K 上代数的ならば，それらの和，差，積，商

$$\alpha + \beta, \quad \alpha - \beta, \quad \alpha\beta, \quad \frac{\alpha}{\beta}$$

も K 上代数的である．ただし，商は $\beta \neq 0$ のときのみ考える．

補題 4.6　L/K を体の拡大とし，$A \subset L$ とすると，$K(A)$ は A の有限部分集合 B のすべてを走らせることにより

$$K(A) = \bigcup_{B} K(B)$$

と表される．すなわち，任意の $\alpha \in K(A)$ に対して，$\alpha \in K(\beta_1, \cdots, \beta_n)$ であるような有限個の $\beta_1, \cdots, \beta_n \in A$ がとれる．

定理 4.7　L/K を体の拡大とし，$A \subset L$ とする．A の任意の元が K 上代数的ならば $K(A)/K$ は代数拡大である．

命題 4.8　L/K を体の拡大とし，M をその中間体とする． $\alpha \in L$ が K 上代数的であるとき，

$$[M(\alpha) : M] \leq [K(\alpha) : K]$$

が成り立つ．

例 4.9　$X^3 - 1$ の 1 でない根のひとつを ω とする（1 の原始 3 乗根）． このとき，ω, ω^2 は $X^2 + X + 1$ の 2 根である． $X^3 - 2$ の実根を α とすれば，他の根は $\alpha\omega, \alpha\omega^2$ で与えられる． $X^3 - 2$ は $\mathbb{Q}$ 上既約だから，定理 3.5 より $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ は 3 次拡大である． このとき，

(a)　$M = \mathbb{Q}(\omega)$ とおけば，$[M(\alpha) : M] = 3 = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$,

(b)　$L = \mathbb{Q}(\alpha\omega)$ とおけば，$[L(\alpha) : L] = 2 < 3 = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$

が成り立ち，それぞれ，前命題において，等号が成り立つ例，成り立たない例となっている．

定義 4.10　Ω/K を体の拡大とし，L, M をその中間体とするとき，L, M をともに含む Ω の最小の部分体を L, M の**合成体**といい LM で表す． すなわち，$LM = L(M) = M(L)$ である．

定理 4.11　L, M を体の拡大 Ω/K の中間体とする．

(1)　L, M がともに K 上有限次ならば，LM も K 上有限次である．

(2)　L, M がともに K 上代数的ならば，LM も K 上代数的である．

定理 4.12　L, M を体の拡大 Ω/K の中間体とすると，

$$[LM : M] \leq [L : K]$$

が成り立つ．