§8.　正規性

定義 8.1　L/K を代数拡大とする．L の任意の元について，その K 上の共役元がすべて L に属するとき，L は K 上**正規**であるといい，L/K を**正規拡大**という．

命題 8.2　M が正規拡大 L/K の中間体ならば，L/M は正規拡大である．

定義 8.3　体 K 上の多項式 $f(X)$ に対して，その $\overline{K}[X]$ での分解を

$$f(X) = a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_n), \qquad a \in K^{\times},\quad \alpha_i \in \overline{K}$$

とするとき，$K(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ を $f(X)$ の K 上の**最小分解体**という．

例 8.4　ω を 1 の原始 3 乗根とし，

$$K = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{5}\right),\quad M = \mathbb{Q}(\omega),\quad L = KM = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{5},\, \omega\right)$$

とおく（$M = \mathbb{Q}\bigl(\sqrt{-3}\bigr)$，$L = \mathbb{Q}\bigl(\sqrt[3]{5},\, \sqrt{-3}\bigr)$ とも表せることに注意）．

(a) $K/\mathbb{Q}$ は正規拡大ではない．
(b) $M/\mathbb{Q}$ は正規拡大である．
(c) L は，X^3-5 の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体であり，$\mathbb{Q}$ 上正規である．

定理 8.5　代数拡大 L/K について，次は同値である．

(i) L/K は正規拡大である．
(ii) すべての $\alpha \in L$ に対して $\mathrm{Conj}(\alpha, K) \subset L$.
(iii) 任意の $\alpha \in L$ に対して，α の K 上の最小多項式の K 上の最小分解体は L に含まれる．
(iv) すべての $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して $\sigma(L) \subset L$.
(v) すべての $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ に対して $\sigma(L) = L$.

系 8.6　L/K，M/K を体の拡大とする．

(1) L/K が正規拡大ならば，LM/M も正規拡大である．
(2) L/K，M/K がともに正規拡大ならば LM，$L \cap M$ はどちらも K 上正規である．

定理 8.7　有限次拡大 L/K について，次は同値である．

(i) L/K は正規拡大である．
(ii) L は K 上のある多項式の K 上の最小分解体である．

定理 8.8　α が体 K 上代数的であるとき，次は同値である．

(i) $K(\alpha)/K$ は正規拡大である．
(ii) $K(\alpha)$ は α の K 上の最小多項式の K 上の最小分解体である．
(iii) $|\mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)| = |\mathrm{Conj}(\alpha, K)|$ が成り立つ．

例 8.9　自然数 n に対して ζ_n を 1 の原始 n 乗根とする． すなわち，$\zeta_n \in \mathbb{C}^\times$ であって，その位数が n であるとする（$\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ であるとしてよい）．

(a) $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ は $\mathbb{Q}$ 上正規である．
(b) 体 K が ζ_n を含むとすると，任意の a に対して $K(\sqrt[n]{a})/K$ は正規拡大である．

例 8.10　(1) 任意の体 K の任意の 2 次拡大体は K 上正規である．

(2) $f(X) = X^3+3X+1$ の実数根はただひとつであり，それを α とすると，他の根（$\mathbb{Q}$ 上の共役元）は実数ではないから $\mathbb{Q}(\alpha)$ に属さない． よって $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ は正規ではない．
(3) $g(X) = X^3 - 3X + 1$ の任意のひとつの根を β とすると，$\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}$ は 正規拡大である． 実際，他の 2 根が $\dfrac{1}{1-\beta}$，$1-\dfrac{1}{\beta}$ であることが確かめられるので，$\mathbb{Q}(\beta)$ は $g(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体である．

定義 8.11　L/K を代数拡大とする． $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ によって $\sigma(L)$ で表される体を L の K 上の**共役体**，あるいは簡単に L/K の共役体という．

定義 8.12　代数拡大 L/K に対して，L を含む K 上の最小の正規拡大体を L/K の**正規閉包**という．

命題 8.13　α が K 上代数的であるとき，$K(\alpha)/K$ の正規閉包は $K(\mathrm{Conj}(\alpha, K))$ である．