# 代数II　小テスト　2017–10–04

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．ただし $L/K$ は体の拡大である．

( ○ ) $\alpha, \beta \in L$ に対して，$\alpha^{100} - \beta^{-500} \in L$ が成り立つ (ただし $\beta \neq 0$).
【解説】　$L$ は体なので加減乗除について閉じている．

( ○ ) $\alpha, \beta \in L$ かつ $\alpha \in K(\beta)$ ならば，$K(\alpha) \subset K(\beta)$ が成り立つ．
【解説】　$\alpha \in K(\beta)$ より，$K(\beta)$ は $K$ と $\alpha$ をどちらも含む．$K$ と $\alpha$ をどちらも含む最小の体が $K(\alpha)$ だから $K(\alpha) \subset K(\beta)$.

( × ) $\alpha \in L$ に対して，一般に $K(\alpha) \subset K(\alpha^3)$ が成り立つ．
【解説】　$\alpha^3 \in K(\alpha)$ なので $K(\alpha^3) \subset K(\alpha)$ は成り立つが，逆は反例がある; たとえば，$\alpha = \sqrt[3]{2}$ とおくと $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\alpha) \not\subset \mathbb{Q}(\alpha^3) = \mathbb{Q}$.

( ○ ) $L/K$ が有限次拡大ならば，任意の中間体 $M$ に対して $M/K$ は有限次拡大である．
【解説】　有限次元ベクトル空間の任意の部分空間は有限次元である．

( ○ ) $L/K$ が 7 次拡大ならば，中間体は $K$ と $L$ 以外にはない．
【解説】　中間体 $M$ について $[L:K] = [L:M][M:K]$ だから，$[M:K]$ は $[L:K] = 7$ の約数．7 は素数なので $[M:K] = 1$ または 7 であり，前者の場合 $M = K$，後者の場合 $M = L$.

( × ) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ は有限次拡大である．すなわち，有限個の実数 $x_1, \ldots, x_n$ が存在して，任意の実数は $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ $(a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q})$ と表される．
【解説】　一般に $L/K$ が $n$ 次拡大ならば，$K$ 上のベクトル空間として $L$ は $K^n$ と同型．よって，$L$ の濃度は $K$ の濃度の $n$ 乗である．$\mathbb{Q}$ は可算濃度だから，もし $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ が有限次ならば $\mathbb{R}$ も可算となって矛盾．

( ○ ) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$ が成り立つ．
【解説】　$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ より $\mathbb{Q}(\sqrt{8}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$，逆に $\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{8}}{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{8})$ より $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{8})$.

( × ) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ が成り立つ．
【解説】　$[\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 2$ かつ $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) : \mathbb{Q}] = 3$ なので，包含関係はない．

(○) $\mathbb{Q}$ は真の部分体を含まない（つまり，$F$ が $\mathbb{Q}$ の部分体ならば $F = \mathbb{Q}$）.

【解説】　$F$ を $\mathbb{Q}$ の部分体とする．0 でない $a \in F$ をとれば $1 = a/a \in F$．任意の有理数 $\alpha$ は，何個かの 1 を加減乗除することで得られるから $\alpha \in F$.

(×) $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ の $\mathbb{Q}$ 上の基底ではない.

【解説】　$1, \sqrt{3}$ は基底であり，行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ は正則だから，この行列で変化して得られる $2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$ も基底である.