

代数II 小テスト 2017-10-11

答えと簡単な解説

[問1] 以下の文のそれぞれについて、正しいものには○を、正しくないものには×をカッコ内に記せ。ただし L/K は体の拡大で、 $\alpha \in L$ である。

- (○) $K[\alpha] \subsetneq K(\alpha)$ ならば、 α は K 上超越的である。
【解説】 一般に $K[\alpha] \subset K(\alpha)$ であるが、とくに、 α が K 上代数的ならば、 $K[\alpha] = K(\alpha)$ である。
- (×) α が K 上代数的ならば、 $K[\alpha]$ は体ではない。
【解説】 $K[\alpha] = K(\alpha)$ だから体である。
- (○) 実数 $\sqrt[3]{5}$ は \mathbb{Q} 上代数的である。
【解説】 $\sqrt[3]{5}$ は $X^3 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$ の根である。
- (○) 円周率 π は $\mathbb{Q}(\pi^5)$ 上代数的である。
【解説】 $F = \mathbb{Q}(\pi^5)$ とおけば、 π は $X^5 - \pi^5 \in F[X]$ の根である。
- (×) \mathbb{Q} 上代数的でも超越的でもない \mathbb{C} の元が存在する。
【解説】 超越的とは代数的でないことである。
- (○) α が K 上代数的ならば、 $\frac{1}{1+\alpha} \in K[\alpha]$ が成り立つ。
【解説】 α が K 上代数的ならば、 $K[\alpha] = K(\alpha)$ 、したがって $K[\alpha]$ は体である。
- (○) α が $X^{20} + X^7 + 1$ の根ならば、 $[K(\alpha) : K] \leq 20$ である。
【解説】 K 上の多項式 $f(X) (\neq 0)$ が $f(\alpha) = 0$ をみたすならば、 $[K(\alpha) : K] \leq \deg f$ が成り立つ。
- (○) α^3 が K 上代数的ならば、 α も K 上代数的である。
【解説】 α^3 を根にもつ $f(X) \in K[X]$ が存在する。このとき、 α は $f(X^3) \in K[X]$ の根である。
- (○) $K(\alpha)/K$ が有限次拡大ならば、 α は K 上代数的である。
【解説】 $K(\alpha)/K$ が n 次拡大ならば、 $n+1$ 個の元 $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ は K 上一次従属である。したがって、 K 上の自明でない一次関係式 $c_0 + c_1\alpha + \dots + c_n\alpha^n$ があり、これから α を根にもつ K 上の零でない多項式が作れる。
- (×) α は K 上代数的だが、 α^3 は K 上超越的であることもあり得る。
【解説】 $K(\alpha)/K$ は有限次拡大である。一方、 $K \subset K(\alpha^3) \subset K(\alpha)$ だから、 $K(\alpha^3)/K$ も有限次拡大である。