代数II　小テスト　2017–10–18

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし L/K は体の拡大で，$\alpha \in L$ である．

(○) $[K(\alpha):K]=1$ ならば $\alpha \in K$ が成り立つ．
【解説】　$[K(\alpha):K]=1$ ならば $K(\alpha)=K$ である．

(○) $f(X)$ が $f(\alpha)=0$ をみたす零でない K 上の多項式ならば，一般に，$[K(\alpha):K] \leq \deg f$ が成り立つ．
【解説】　$n=\deg f$ とすると，n 個の元 $1,\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^{n-1}$ が，K 上 $K(\alpha)$ を生成するから，K 上のベクトル空間 $K(\alpha)$ の次元は n 以下．

(×) $f(\alpha)=0$ かつ $[K(\alpha):K] < \deg f$ をみたす K 上の既約多項式 $f(X)$ が存在する．
【解説】　$f(X)$ が K 上既約で $f(\alpha)=0$ ならば，$[K(\alpha):K]=\deg f$ でなくてはならない．

(×) α が K 上の多項式 $f(X)$ の根ならば，$f(X)$ はつねに α の K 上の最小多項式である．
【解説】　$f(X)$ が K 上既約なら正しいが，可約のときは間違い．

(×) X^4-4 は $\sqrt{2}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式である．
【解説】　$\sqrt{2}$ は根ではあるが，$X^4-4=(X^2-2)(X^2+2)$ と因数分解されるから，X^4-4 は $\mathbb{Q}$ 上既約ではない．

(○) $X^2-\pi^2$ は π の $\mathbb{Q}(\pi^2)$ の最小多項式である．
【解説】　π を根にもっているから，$X^2-\pi^2$ の $\mathbb{Q}(\pi^2)$ 上の既約性を確かめればよい． もし可約ならば，$\pi \in \mathbb{Q}(\pi^2)$． したがって，$\pi = \dfrac{g(\pi^2)}{h(\pi^2)}$ をみたす $g(X),h(X) \in \mathbb{Q}[X]$ がとれる． そこで，$f(X)=g(X^2)-Xh(X^2)$ とおけば，$f(\pi)=0$ となって，π が $\mathbb{Q}$ 上超越的であることに矛盾する． ここで，$\deg(g(X^2))$ は偶数で $\deg(Xh(X^2))$ は奇数なので，$f(X)$ が零多項式でないことに注意．

[問 2] 以下の α と K について，α の K 上の最小多項式を求めよ．

(あ) $\alpha = 10 - \sqrt{5}$,　$K = \mathbb{Q}$

【解説】　単純な計算で $\alpha - 20\alpha + 95 = 0$ であるが，$\mathbb{Q}$ 上の既約性を考慮して，$\boxed{X^2 - 20X + 95}$.

(い) $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$,　$K = \mathbb{Q}$

【解説】　$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ は $X^3 - 1$ の根であるが，因数分解 $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ と $\alpha \neq 1$ より $\boxed{X^2 + X + 1}$.　ここで，α は実数ではないので，$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] > 1$ に注意．　または，$X^2 + X + 1$ の $\mathbb{Q}$ 上の既約性より $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2$ がわかる．

(う) $\alpha = \dfrac{1}{\beta}$，ただし β は $X^5 + 2X + 6$ の根，$K = \mathbb{Q}$

【解説】　$\beta^5 + 2\beta + 6 = 0$ を β^5 で割ると，$1 + 2\alpha^4 + 6\alpha^5 = 0$.　さらに $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 5$ に注意して，$\boxed{X^5 + \dfrac{1}{3}X^4 + \dfrac{1}{6}}$.

(え) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{-2}$,　$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

【解説】　$\alpha - \sqrt{2} = \sqrt{-2}$ の両辺を平方して，$\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 = -2$. よって，$\boxed{X^2 - 2\sqrt{2}X + 4}$.　ここで，$\alpha$ は実数でなく $K \subset \mathbb{R}$ だから，$[K(\alpha) : K] > 1$ に注意．　または，$\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-2})$ は $\mathbb{Q}$ 上の 4 次拡大だから，$[K(\alpha) : K] = 2$ がわかる．