代数II　小テスト　2017–10–25

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．

(○) 複素数体 $\mathbb{C}$ は実数体 $\mathbb{R}$ 上の代数拡大体である．
【解説】　$\mathbb{C} = \mathbb{R}(\sqrt{-1})$ かつ，$\sqrt{-1}$ は $X^2 + 1$ の根，すなわち $\mathbb{Q}$ 上代数的なので，$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ は代数拡大．

(×) $\mathbb{R}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大体である．
【解説】　$\pi \in \mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 上超越的．

(×) $\mathbb{C}$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大体である．
【解説】　前問と同様．

(○) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ は代数拡大である．
【解説】　$\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ より，$\mathbb{Q}(\sqrt{6}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$．さらに，$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的なので $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ 上も代数的．

(○) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4}}{\sqrt[5]{5} - \sqrt[6]{6}}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
【解説】　$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[6]{6}$ はすべて $\mathbb{Q}$ 上代数的なので，それらの加減乗除で得られる数は $\mathbb{Q}$ 上代数的．

(×) L/K が超越拡大で M が中間体ならば，L/M はつねに超越拡大である．
【解説】　$\mathbb{Q}(\pi, \sqrt{2})/\mathbb{Q}$ は超越拡大であり，$\mathbb{Q}(\pi, \sqrt{2})/\mathbb{Q}(\pi)$ は代数拡大．

(×) L/K が超越拡大で M が中間体ならば，M/K はつねに超越拡大である．
【解説】　$\mathbb{Q}(\pi, \sqrt{2})/\mathbb{Q}$ は超越拡大であり，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ は代数拡大．

(○) L/K が有限次拡大で M が中間体ならば，L/M はつねに代数拡大である．
【解説】　L/K が有限次ならば，L/M も有限次なので代数的．

(×) L/K が無限次拡大ならば，L/K は超越拡大である．
【解説】　$A = \{\, \sqrt[n]{n} \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ とおくと，$\mathbb{Q}(A)$ は無限次代数拡大．

(○) α が $\mathbb{Q}$ 上超越的ならば，$\sqrt[3]{\alpha}$ も $\mathbb{Q}$ 上超越的である．
【解説】　もし $\sqrt[3]{\alpha}$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，$\pi = (\sqrt[3]{\alpha})^3$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的．