代数II　小テスト 2017–11–01

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ◯ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし，L/K は体の拡大で，$\alpha, \beta \in L$ である．

(◯) $[L : K]$ が素数ならば，$K(\alpha) = L$ をみたす $\alpha \in L$ が存在する．
【解説】　$\alpha \notin K$ である $\alpha \in L$ を任意にとれば，$K \subsetneq K(\alpha) \subset L$ であるが，$[L : K] = [L : K(\alpha)][K(\alpha) : K]$ が素数なので $[L : K(\alpha)] = 1$.

(◯) α が K 上代数的で，β が $K(\alpha)$ 上代数的ならば，β は K 上代数的である．
【解説】　仮定より $[K(\alpha, \beta) : K] = [K(\alpha, \beta) : K(\alpha)][K(\alpha) : K]$ が有限なので，$K(\alpha, \beta)/K$ は代数拡大.

(×) α が K 上超越的で，β が $K(\alpha)$ 上代数的ならば，β は K 上代数的である．
【解説】　$\alpha = \beta$ とすると反例になる．

(×) α が $K(\beta)$ 上超越的ならば，β は $K(\alpha)$ 上超越的である．
【解説】　$\beta \in K$ とすると反例になる．

(◯) α が K 上超越的で，かつ $K(\beta)$ 上代数的ならば，β は $K(\alpha)$ 上代数的である．
【解説】　α の $K(\beta)$ 上の最小多項式を $f(X)$ とする． α は K 上超越的だから，$f(X)$ の係数のどれかは K の元ではない． よって，2 変数多項式 $F(X, Y) \in K[X, Y]$ が存在して，X, Y に関する次数がどちらも 1 以上で $F(\alpha, \beta) = 0$ をみたす.

(×) α, β がどちらも K 上超越的ならば，$K(\alpha, \beta)/K(\alpha)$ は超越拡大である．
【解説】　$\alpha = \beta$ とすると反例になる．

(◯) 自然数 n に対して，$W_n = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \,\}$ とおくと，$\mathbb{Q}(W_n)$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
【解説】　W_n の任意の元は $\mathbb{Q}$ 上代数的.

(◯) $W = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} W_n = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } z^n = 1 \,\}$ とおくと，$\mathbb{Q}(W)$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
【解説】　前問と同様.

(×) $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ とおくと，$\mathbb{Q}(S)$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．

【解説】　$\mathbb{Q}$ 上超越的な実数 $0 < t < 1$ (たとえば $t = 1/\pi$) をとって，$z = t + \sqrt{t^2 - 1}$ とおくと，$z \in S$ である．一方，$t = -\dfrac{z^2 + 1}{2z}$ と計算されるから，z が $\mathbb{Q}$ 上代数的だとすると t も代数的となって矛盾．

(○) $z \in \mathbb{C}$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，$|z|$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的である．

【解説】　$f(X)$ を z の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式とすると，$f(z) = 0$ の複素共役をとって $f(\bar{z}) = 0$ だから，$\bar{z}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的，よって $|z|^2 = z\bar{z}$ も代数的．