

代数II 小テスト 2017-11-08

学年	学籍番号	氏名

[問1] 以下の文のそれぞれについて, 正しいものには ○ を, 正しくないものには × をカッコ内に記せ. ただし,  $L/K$  を体の拡大,  $\alpha \in L$  とし, 写像

$$\varphi: K[X] \longrightarrow L, \quad g(X) \mapsto g(\alpha)$$

を考える.

- ( ) 写像  $\varphi$  は (可換環の) 準同型写像である.
- ( )  $\frac{1}{\alpha^2 + 1} \in \text{Im } \varphi$  ならば,  $\alpha$  は  $K$  上代数的である.
- ( )  $\alpha$  が  $K$  上超越的ならば,  $\text{Im } \varphi$  は体である.
- ( )  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$  ならば,  $\alpha$  は  $K$  上代数的である.
- ( )  $\alpha$  が  $K$  上代数的で,  $f(X)$  が  $\alpha$  の  $K$  上の最小多項式ならば,  $\text{Ker } \varphi = (f(X))$  が成り立つ.
- ( )  $f(\alpha) = 0$  をみたす  $K$  上の任意の多項式  $f(X)$  に対して, 体  $K(\alpha)$  は剰余環  $K[X]/(f(X))$  と同型である.
- ( )  $\mathbb{R}$  上の任意の3次多項式  $f(X)$  に対して, 剰余環  $\mathbb{R}[X]/(f(X))$  は体である.
- ( )  $\mathbb{C}$  は剰余環  $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$  と同型である.
- ( )  $\mathbb{C}$  は剰余環  $\mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 3)$  とは同型ではない.

[問2]  $\alpha$  を  $X^3 - X - 1$  の根とするとき,  $\frac{1}{\alpha^2 + 1} = a + b\alpha + c\alpha^2$  をみたす有理数  $a, b, c$  を定めよ.

$a =$	$b =$	$c =$
-------	-------	-------