代数II　小テスト　2017–11–15

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには $\times$ をカッコ内に記せ．

(○) 実数 x, y がどちらも $\mathbb{Q}$ 上代数的ならば，複素数 $x + y\sqrt{-1}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
【解説】　$\sqrt{-1}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的だから，体 $\mathbb{Q}(x, y, \sqrt{-1})$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大体であり $x + y\sqrt{-1}$ はそれに属している．

($\times$) $\mathbb{Q}$ 上超越的な実数 x, y で，$x + y\sqrt{-1}$ が $\mathbb{Q}$ 上代数的であるものが存在する．
【解説】　$\alpha = x + y\sqrt{-1}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を $f(X)$ とすると，$f(\alpha) = 0$ の複素共役をとって $f(\bar{\alpha}) = 0$，したがって $\bar{\alpha} = x - y\sqrt{-1}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的．よって，$x = \dfrac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}$，$y = \dfrac{\alpha - \bar{\alpha}}{2\sqrt{-1}}$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的．

(○) ガウスが初めて証明したとされる『代数学の基本定理』は，$\mathbb{C}$ が代数的閉体であることを主張している．
【解説】　そゆこと．

(○) L が $\mathbb{Q}$ を含む代数的閉体ならば，任意の整数 n について $\sqrt{n} \in L$ が成り立つ．
【解説】　$\sqrt{n}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的だから L 上も代数的，よって $\sqrt{n} \in L$.

($\times$) $S = \{ \sqrt{n} \mid n \in \mathbb{Z} \}$ とおくと，$\mathbb{Q}(S)$ は代数的閉体である．
【解説】　任意の $\alpha \in \mathbb{Q}(S)$ に対して，有限個の $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$ がとれて，$K = \mathbb{Q}(\sqrt{n_1}, \ldots, \sqrt{n_r})$ とおくと $\alpha \in K$．ところで，数学的帰納法より $[K : \mathbb{Q}] = 2^s$ $(0 \leq s \leq r)$ が確かめられるから，$\mathbb{Q}(\alpha) \subset K$ と合わせて $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^t$ $(0 \leq t \leq r)$．一方，たとえば $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ は 3 次拡大だから $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(S)$.

(○) $\mathbb{Q}$ 上代数的な複素数全体の集合は，代数的閉体である．
【解説】　$\mathbb{Q}$ 上代数的な複素数全体の集合を L とおくと，L は $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大体である．α が L 上代数的ならば，その L 上の最小多項式を $f(X)$ とするとき，$f(\beta) = 0$ をみたす $\beta \in \mathbb{C}$ が存在する（だって，$L \subset \mathbb{C}$ かつ $\mathbb{C}$ は代数的閉体だもん）．β は L 上代数的，よって $\mathbb{Q}$ 上も代数的だから $\beta \in L$．したがって $f(X)$ は 1 次式であり $\alpha \in L$.

(×) L, M を $\mathbb{C}$ の部分体で，それぞれ $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ の代数的閉包とすると，$L \subsetneqq M$ が成り立つ．

【解説】 $L \subset M$ は明らか． 逆に $\alpha \in M$ とすると，α は $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ 上代数的だから $\mathbb{Q}$ 上も代数的，よって $\alpha \in L$． したがって $L = M$．

(○) 代数的閉体は無限集合である．

【解説】 L を代数的閉体とする． もし L が有限集合だとすると，L 上の多項式 $f(X) = \prod_{\alpha \in L}(X - \alpha) + 1$ は L で根をもたない．

(○) L が体 K の代数的閉包ならば，L/K の任意の中間体 M について，L は M の代数的閉包である．

【解説】 L/K が代数拡大だから L/M も代数拡大．

(○) L を体 K の代数的閉包とし，$F(X, Y)$ を定数でない K 上の 2 変数多項式とすると，$F(x, y) = 0$ をみたす $x, y \in L$ が存在する．

【解説】 $F(X, Y)$ が X についての多項式（Y を含まない）ならば，L が代数的閉体なので $F(x, 0) = 0$ をみたす $x \in L$ がとれる． $F(X, Y)$ が X も Y も含む場合には，Y の多項式としての最高次の項を $f(X)Y^n$ ($n > 0$, $f(X) \in K[X]$) とするとき，$f(x) \neq 0$ である $x \in L$ がとれて（だって L は無限集合だもん），$F(x, Y)$ は定数でない L 上の n 次多項式となるから $F(x, y) = 0$ をみたす $y \in L$ が存在する．