代数II　小テスト　2017–11–29

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには $\times$ をカッコ内に記せ．ただし，$\overline{K}$ は 体 K の代数的閉包である．

(○) $\mathrm{Conj}(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ が成り立つ．
【解説】　$\sqrt{2}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $X^2 - 2$ の根は $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ である．

($\times$) $\mathrm{Conj}(\sqrt{2}+\sqrt{3}, \mathbb{Q}(\sqrt{3}))$ は定義できない．
【解説】　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 上代数的だから定義できる．

(○) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$ とすると，$-\sqrt{2} + \omega\sqrt[3]{5} \in \mathrm{Conj}(\alpha, \mathbb{Q})$ である．ただし，ω は 1 の原始 3 乗根である．
【解説】　$-\sqrt{2} + \omega\sqrt[3]{5}$ と α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は一致する．

(○) $\alpha, \beta \in \overline{K}$ に対して，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) \cap \mathrm{Conj}(\beta, K) \neq \phi$ ならば，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) = \mathrm{Conj}(\beta, K)$ が成り立つ．
【解説】　$\gamma \in \mathrm{Conj}(\alpha, K) \cap \mathrm{Conj}(\beta, K)$ とすると，α, γ は K 上共役で，かつ β, γ も K 上共役，よって α, β は K 上共役である．そこで，$\delta \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ ならば，α, δ が共役より，β, δ が共役，よって $\delta \in \mathrm{Conj}(\beta, K)$ であり，$\mathrm{Conj}(\alpha, K) \subset \mathrm{Conj}(\beta, K)$．逆も同様.

(○) L/K を体の拡大とし $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ とすると，任意の $\alpha \in L$ に対して $\sigma(\alpha) \in \mathrm{Conj}(\alpha, K)$ が成り立つ．
【解説】　α と $\sigma(\alpha)$ は K 上共役である．

(○) $\alpha, \beta \in \overline{K}$ が K 上共役ならば，任意の $g(X) \in K[X]$ に対して，$g(\alpha)$ と $g(\beta)$ は K 上共役である．
【解説】　仮定より，$\sigma(\alpha) = \beta$ をみたす $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する．このとき，$g(\beta) = g(\sigma(\alpha)) = \sigma(g(\alpha)) \in \mathrm{Conj}(g(\alpha), K)$.

(○) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q})$ は位数 2 の巡回群である．
【解説】　$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q})$ とすると，$\sigma(\sqrt{3})$ は $\mathbb{Q}$ 上 $\sqrt{3}$ と共役だから，もし $\sigma \neq \mathrm{id}$（恒等写像）ならば，$\sigma(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$ しかない．$\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$ であって，$\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}, \sigma\}$ は位数 2 の巡回群.

(×) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7})/\mathbb{Q})$ は位数 5 の巡回群である．
【解説】 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7})/\mathbb{Q})$ とすると，$\sigma(\sqrt[5]{7})$ は $\sqrt[5]{7}$ と $\mathbb{Q}$ 上共役である． よって $\zeta = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}}$ (1 の原始 5 乗根) を用いて，$\sigma(\sqrt[5]{7})$ は $\zeta^j\sqrt[5]{7}$ $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$ のどれかと一致するが，これらのうち $\sqrt[5]{7}$ を除いて $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7})$ に属さない（だって，実数じゃないもん）ので，$\sigma(\sqrt[5]{7}) = \sqrt[5]{7}$ であることがわかり，したがって $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7})/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}\}$.

(○) L/K を体の拡大とするとき，その任意の中間体 M に対して，
$\mathrm{Aut}(L/M) \subset \mathrm{Aut}(L/K)$ が成り立つ．
【解説】 $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/M)$ ならば，$\sigma : L \to L$ は準同型であって，任意の $x \in M$ に対して $\sigma(x) = x$． 一方，$K \subset M$ であるから，$x \in K$ についても $\sigma(x) = x$ であり $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$.

(×) L/K を体の拡大とするとき，その任意の中間体 M に対して，
$\mathrm{Aut}(M/K) \subset \mathrm{Aut}(L/K)$ が成り立つ．
【解説】 $\sigma \in \mathrm{Aut}(M/K)$ とする． $M \subsetneq L$ であるとき，$\sigma : M \to M$ を L から L への写像とみなす自然な方法がない．