代数II　小テスト　2017–12–13

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．ただし，$\overline{K}$ は 体 K の代数的閉包である．

(○) $\alpha \in \overline{K}$ が K 上分離的で，さらに $\beta \in \overline{K}$ が α の K 上の共役元ならば，β も K 上分離的である．
【解説】　α, β の K 上の最小多項式は同じ．

(○) $X^3 + X + 1$ は $\mathbb{F}_2$ 上既約である．
【解説】　3 次式なので，$\mathbb{F}_2$ 上可約であるためには $\mathbb{F}_2$ に根をもつことが必要十分であるが，$0, 1 \in \mathbb{F}_2$ はどちらも根ではないので，$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ に根をもたない．

(×) $X^3 + X + 1$ は $\mathbb{F}_3$ 上既約である．
【解説】　前問と同様に考える．$\mathbb{F}_3$ において $1^3 + 1 + 1 = 0$ より，$1 \in \mathbb{F}_3$ は根である．

(○) $X^2 - 3$ は $\mathbb{F}_5$ 上既約である．
【解説】　前問，前々問と同様に考える．3 は 5 を法として平方非剰余だから，$\mathbb{F}_5$ の任意の元は $X^2 - 3$ の根ではない．

(○) 元の個数が 25 である体が存在する．
【解説】　前問より $X^2 - 3$ は $\mathbb{F}_5$ 上既約である．よって，その根を α とすれば，$[K(\alpha) : \mathbb{F}_5] = 2$．すなわち，$K(\alpha)$ は $\mathbb{F}_5$ 上 2 次元のベクトル空間であり，ベクトル空間としては $\mathbb{F}_5^2 = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ と同型，したがって $|K(\alpha)| = |\mathbb{F}_5|^2 = 5^2 = 25$．

(×) 標数が 25 である体が存在する．
【解説】　体の標数は 0 または素数である．

(○) 可換環 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ は，$\mathbb{F}_3$ と同型な部分体をもつ．
【解説】　$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ は，可換環として同型であるから，$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{F}_3$ は $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の部分環とみなせる．

(×) $X^4 - 5X^2 + 6$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体は $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ である．
【解説】　$X^4 - 5X^2 + 6 = (X^2 - 2)(X^2 - 3)$ なので，最小分解体は $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ であり，これは $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ を含むが一致はしない．

(〇) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-2})$ は X^4+1 の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体である．

【解説】　複素平面上で考えれば，$X^4=-1$ の解は $e^{\frac{\pi i}{4}}$, $e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $e^{\frac{5\pi i}{4}}$, $e^{\frac{7\pi i}{4}}$ であり，まとめて $\dfrac{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}$ (複号は任意)．最小分解体はこれら 4 つの複素数を $\mathbb{Q}$ に添加したものであり，$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{-2})$ に一致する．

(〇) 体 K の標数が 0 ならば，K 上のすべての既約多項式は重根をもたない．

【解説】　標数 0 の体上では，定数でない任意の多項式 $f(X)$ に対して，$\deg f'(X) = \deg f(X) - 1$ だから，もし $f(X)$ が既約ならば，$f(X)$ の根は $f'(X)$ の根にはなり得ない．