§3. 代数的元

この節全体を通して，L/K を体の拡大とし，$\alpha \in L$ とする．

定義 3.1 α を根とする K 上の零でない多項式が存在するとき，すなわち，

$$\exists f(X) \in K[X] - \{0\} \quad \text{s.t.} \quad f(\alpha) = 0$$

であるとき，α は K 上**代数的**であるという． K 上代数的でない元は，K 上**超越的**であるといわれる．

例 3.2 (1) $\sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{5}+7}{1-\sqrt{2}}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．

(3) 自然対数の底 e は $\mathbb{Q}$ 上超越的である（Hermite の定理 (1873)）．

(4) 円周率 π は $\mathbb{Q}$ 上超越的である（Lindemann の定理 (1882)）．

補題 3.3 α が K 上代数的ならば，以下が成り立つ．

(1) $K[\alpha] = K(\alpha)$． すなわち，$g(\alpha) \neq 0$ である任意の $g(X) \in K[X]$ に対して，$1/g(\alpha) = h(\alpha)$ をみたす $h(X) \in K[X]$ が存在する．

(2) $f(\alpha) = 0$ をみたす零でない $f(X) \in K[X]$ に対して，$[K(\alpha) : K] \leq \deg f$．

定理 3.4 α に対して次は同値である．

(i) α は K 上代数的である．

(ii) $K(\alpha)/K$ は有限次拡大である．

(iii) $K(\alpha) = K[\alpha]$ が成り立つ．

定理 3.5 α が K 上代数的であるとき，α を根にもつ $f(X) \in K[X]$ に対して次は同値である．

(i) $f(X)$ は K 上既約である．

(ii) $[K(\alpha) : K] = \deg f$．

(iii) $f(X)$ の次数は最小である． すなわち，$g(X)(\neq 0) \in K[X]$ が α を根にもつならば，$\deg f \leq \deg g$．

定義 3.6　前定理のような多項式 $f(X) \in K[X]$ のうちモニックなものは一意的に定まる．これを α の K 上の**最小多項式**という．

定理 3.7　α が K 上代数的ならば，α の K 上の最小多項式が存在する．

命題 3.8　$K(\alpha)/K$ が有限次拡大で $[K(\alpha):K] = n$ ならば，

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}$$

は K 上ベクトル空間としての $K(\alpha)$ の基底である．

例 3.9　(1)　$\sqrt{3}$ は $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $X^2 - 3$.

(2)　$1 - \sqrt{5}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $X^2 - 2X - 4$.

(3)　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $X^3 - \dfrac{1}{7}$.

(4)　$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $X^6 - 6X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 36X + 1$.

最後の例は，たとえば，以下を順に示すことで得られる; ただし，$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$, $f(X) = X^6 - 6X^4 - 6X^3 + 12X^2 - 36X + 1$ とする．

(a)　$f(\alpha) = 0$ より $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] \leq \deg f = 6$

(b)　$\sqrt[3]{3} = \alpha - \sqrt{2}$ の両辺を 3 乗することにより，$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$

(c)　$\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$

(d)　$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$ は 2 でも 3 でも割り切れる．

(e)　$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] \geq 6$

(f)　(a), (e) をあわせて，$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = \deg f$

副産物として，$f(X)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であることと $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 6$ が確定する．