§6. 代数的閉体と共役元

定義 6.1 体 L の代数拡大体が L のみであるとき，L を**代数的閉体**という．

例 6.2 (1) $\mathbb{C}$ は代数的閉体である（代数学の基本定理）．
(2) $\mathbb{R}$ は代数的閉体ではない．

定理 6.3 体 L に対して次は同値である．

(i) L は代数的閉体である．
(ii) L 上の既約多項式はすべて 1 次式である．
(iii) L 上の定数でない任意の多項式は 1 次式の積に分解される．
(iv) L 上の定数でない任意の多項式は L で根を持つ．

定義 6.4 体 K の代数拡大体であって代数的閉体であるものを K の**代数的閉包**という．

定理 6.5 Ω が代数的閉体ならば，Ω に含まれる任意の部分体に対して，その代数的閉包が Ω の中に一意的に存在する．

例 6.6 (1) $\mathbb{R}$ の代数的閉包は $\mathbb{C}$ である．
(2) $\mathbb{Q}$ の代数的閉包は $\mathbb{C}$ の部分体として一意的に定まるが，それは $\mathbb{C}$ ではない．

定理 6.7（シュタイニッツ） 任意の体に対してその代数的閉包が存在する． さらに，L_1, L_2 がどちらも体 K の代数的閉包ならば，K 上の同型写像 $L_1 \to L_2$ が存在する．

以下で扱う体は，とくにことわらない限り，すべてある一つの代数的閉体に含まれているとする． したがって，定理 6.5 より，体 K に対してその中で代数的閉包が一意的に定まる． それを $\overline{K}$ で表す． このとき，**K 上の代数拡大体はすべて $\overline{K}/K$ の中間体**である． 実際，L/K が代数拡大ならば，定理 4.11 より $L\overline{K}$ は K 上代数的，したがって $\overline{K}$ 上代数的でもある． よって代数的閉体の定義から $L\overline{K} = \overline{K}$，ゆえに $L \subset \overline{K}$ となる． また，このとき L の代数的閉包は $\overline{K}$ と一致する（だって，それは $\overline{K}$ 上代数的になるから，$\overline{K}$ に一致するもん）．

定義 6.8　体の拡大 L/K に対して，L から L への K 上の同型写像を，L の K 上の**自己同型写像**，または L/K の自己同型写像という．また，それら全体の集合を $\mathrm{Aut}(L/K)$ と表し，L の K 上の**自己同型群**，あるいは L/K の自己同型群という，

$$\mathrm{Aut}(L/K) = \{\, \sigma \mid \sigma : L \to L, \quad K \text{ 上の同型写像 } \}.$$

定理 6.9　L_1, L_2 が体 K 上の代数拡大体で，

$$\tau : L_1 \longrightarrow L_2$$

が K 上の同型写像であるとする．このとき，τ の延長 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する．すなわち，同型写像

$$\sigma : \overline{K} \longrightarrow \overline{K}$$

で，任意の $a \in L_1$ に対して $\sigma(a) = \tau(a)$ であるものがとれる．

定義 6.10　K を体とする．$\alpha, \beta \in \overline{K}$ それぞれの K 上の最小多項式が一致するとき，α, β は K 上**共役**であるという．また，β を α の K 上の**共役元**ともいう．α の K 上の共役元全体の集合を $\mathrm{Conj}(\alpha, K)$ で表す．

例 6.11　$z \in \mathbb{C}$ の複素共役 $\bar{z}$ は，z の $\mathbb{R}$ 上の共役元であり，$\mathrm{Conj}(z, \mathbb{R}) = \{z, \bar{z}\}$ が成り立つ．

定理 6.12　体 K と $\alpha, \beta \in \overline{K}$ に対して次は同値である．

(i)　α, β は K 上共役である．

(ii)　$\sigma(\alpha) = \beta$ をみたす $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K)$ が存在する．

系 6.13　体 K と $\alpha \in \overline{K}$ に対して，

$$\mathrm{Conj}(\alpha, K) = \left\{\, \sigma(\alpha) \mid \sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{K}/K) \,\right\}$$

が成り立つ．

定理 6.14　体 K と $\alpha \in \overline{K}$ に対して，

$$|\mathrm{Aut}(K(\alpha)/K)| \le |\mathrm{Conj}(\alpha, K)| \le [K(\alpha) : K]$$

が成り立つ．