代数II　小テスト　2017–10–10

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ． ただし L/K は体の拡大，$\alpha, \beta \in L$ とする．

(○) $\alpha, \beta \in K$ ならば $K = K(\alpha) = K(\beta) = K(\alpha, \beta)$ が成り立つ．
【解説】　定義からすぐにわかる．

(×) 一般に，$K(\alpha\beta) = K(\alpha, \beta)$ が成り立つ．
【解説】　$\alpha = 0$ かつ $\beta \notin K$ と取れば，$K(\alpha\beta) = K \subsetneq K(\beta) = K(\alpha, \beta)$ となって反例となる． $K(\alpha\beta) \subset K(\alpha, \beta)$ は一般に正しい．

(○) 一般に，$\alpha^{100} - \beta^{-500} \in K(\alpha, \beta)$ が成り立つ (ただし $\beta \neq 0$)．
【解説】　$K(\alpha, \beta)$ は体だから加減乗除について閉じている．

(×) $\alpha \in K(\beta)$ ならば $K(\alpha, \beta) = K(\alpha)$ が成り立つ．
【解説】　$\alpha \in K$ かつ $\beta \notin K$ と取れば，$K = K(\alpha) \subsetneq K(\beta) = K(\alpha, \beta)$ となって反例となる． 結論を $K(\alpha, \beta) = K(\beta)$ とするのが正しい．

(○) $\alpha + \beta \in K$ かつ $\beta \in K$ ならば，$\alpha \in K$ である．
【解説】　$\alpha = (\alpha + \beta) - \beta \in K(\alpha + \beta, \beta) = K$．

(×) 一般に，$K(\alpha) \subset K(\alpha^3)$ が成り立つ．
【解説】　$\alpha^3 \in K(\alpha)$ なので $K(\alpha^3) \subset K(\alpha)$ は正しいが，逆の包含関係には反例がある； $\alpha = \sqrt[3]{2}$ とおくと $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\alpha) \not\subset \mathbb{Q}(\alpha^3) = \mathbb{Q}$．

(○) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{8})$ が成り立つ．
【解説】　$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ より $\mathbb{Q}(\sqrt{8}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$，逆に $\sqrt{2} = \sqrt{8}/2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{8})$ より $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{8})$．

(×) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ が成り立つ．
【解説】　$\sqrt[3]{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ とすると，有理数 a, b によって $\sqrt[3]{5} = a + b\sqrt{5}$ と表される． よって $3 = (a^3 + 15ab^2) + (3a^2b + 5b^3)\sqrt{5}$ だが，$\sqrt{5}$ は無理数なので $3a^2b + 5b^3 = 0$ でなければならない． ゆえに $(3a^2 + 5b^2)b = 0$ だが，ここで $a = b = 0$ ではないから $3a^2 + 5b^2 > 0$，よって $b = 0$，したがって $\sqrt[3]{5} = a \in \mathbb{Q}$ となって矛盾する． (類似の方法で，$\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ も正しくないことがわかる．)

(×) $\mathbb{Q}(3.14) = \mathbb{Q}(\pi)$ が成り立つ.

【解説】 3.14 は有理数だから $\mathbb{Q}(3.14) = \mathbb{Q}$ であるが，π は無理数なので $\pi \notin \mathbb{Q}$. なお，π が無理数であることは (時間が許せば) 講義で証明するので，ここはどーかひとつ$\cdots$.

(○) $\mathbb{Q}$ は真の部分体を含まない（つまり，F が $\mathbb{Q}$ の部分体ならば $F = \mathbb{Q}$）.

【解説】 F を $\mathbb{Q}$ の部分体とすると $1 \in F$. 任意の有理数 α は，1 を有限個用いた加減乗除で表せるから $\alpha \in F$.