代数II　小テスト　2018–10–24

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．ただし L/K は体の拡大で，$\alpha \in L$ である．

(○) α が K 上代数的ならば，L/K の任意の中間体 M について，α は M 上代数的である．
【解説】　K 上の多項式は M 上の多項式でもある．

(○) $\alpha \neq 0$ が K 上代数的ならば，$1/\alpha$ も K 上代数的である．
【解説】　α は K 上代数的だから，K 上の n 次多項式 $f(X)$ で $f(\alpha)=0$ をみたすものがある．このとき $g(X)=X^n f(1/X)$ とおけば，$g(X)$ も K 上の多項式であり $g(1/\alpha)=\alpha^{-n}f(\alpha)=0$ をみたす．

(×) つねに，$K(\alpha)\neq K(\alpha^2)$ が成り立つ．
【解説】　$\mathbb{Q}(1+\sqrt{2})=\mathbb{Q}((1+\sqrt{2})^2)$ が反例となる．ほかにも $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{4})$ なども．一般には，$K(\alpha)\supset K(\alpha^2)$．

(○) $[K(\alpha):K]=2$ かつ $[K(\beta):K]=3$ ならば，つねに $[K(\alpha,\beta):K]\geq 6$ である．
【解説】　$[K(\alpha,\beta):K]=[K(\alpha,\beta):K(\alpha)][K(\alpha):K]$ は 2 の倍数，一方，$[K(\alpha,\beta):K]=[K(\alpha,\beta):K(\beta)][K(\beta):K]$ と考えれば 3 の倍数だから，$[K(\alpha,\beta):K]$ は 6 の倍数，したがって 6 以上である．実は，6 に等しいことがわかるが…，講義でね．

(×) $[L:K]=5$ ならば，L/K の中間体 M で $[M:K]=3$ をみたすものが存在する．
【解説】　$[L:M][M:K]=[L:K]=5$ だが，5 は素数なので $[M:K]=1$ または 5 にしかなり得ない．

(○) $\alpha\in K$ ならば、$[K(\alpha):K]=1$ が成り立つ．
【解説】　$K(\alpha)=K$ となるから $[K(\alpha):K]=1$ である．

(×) $\alpha\notin K$ でも $[K(\alpha):K]=1$ となることがあり得る．
【解説】　$[K(\alpha):K]=1$ ならば $K(\alpha)$ の 0 でない任意の元は，それだけで $K(\alpha)$ の K 上の基底である．とくに $1\in K(\alpha)$ が基底となることから $K(\alpha)=K$ が成り立つ．

(○) $1+\sqrt[3]{5}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である．
【解説】　$(X-1)^3-5\in\mathbb{Q}[X]$ は $1+\sqrt[3]{5}$ を根にもつ．

(○) α^5 が K 上代数的ならば，α も K 上代数的である．

【解説】　$f(X)$ が α^5 を根にもつ $\mathbb{Q}$ 上の多項式ならば，$f(X^5)$ は α を根にもつ $\mathbb{Q}$ 上の多項式である．

(×) 円周率 π は $\mathbb{Q}(\pi^5)$ 上超越的である．

【解説】　$K = \mathbb{Q}(\pi^5)$ とおけば，$X^5 - \pi^5$ は π を根にもつ K 上の多項式だから，π は K 上代数的である．