

代数II 小テスト 2018-10-31

学年	学籍番号	氏名

[問1] 以下の文のそれぞれについて、正しいものには○を、正しくないものには×をカッコ内に記せ。ただし L/K は体の拡大で、 $\alpha \in L$ とする。

- () $\alpha \in K$ ならば、 α の K 上の最小多項式は $X - \alpha$ である。
- () $f(X)$ が $f(\alpha) = 0$ をみたす零でない K 上の多項式ならば、一般に、 $[K(\alpha) : K] \leq \deg f$ が成り立つ。
- () $\alpha \neq 0$ であって、 α が K 上代数的ならば、 $\frac{1}{\alpha} = g(\alpha)$ をみたす K 上の多項式 $g(X)$ が存在する。
- () $\alpha \notin K$ かつ $[L : K]$ が素数ならば、 $L = K(\alpha)$ である。
- () $\alpha \in K(\alpha^2)$ ならば、 α は K 上代数的である。
- () α が K 上超越的ならば、ある自然数 n について $K(\alpha^n) = K(\alpha)$ が成り立つ。
- () α の K 上の最小多項式の次数を d とすると、 α^2 の K 上の最小多項式の次数は $2d$ である。

[問2] 以下の α と K について、 α の K 上の最小多項式を求めよ。

(あ) $\alpha = \sqrt[4]{3} - 2$, $K = \mathbb{Q}$

(い) $\alpha = \frac{1}{\beta}$, ただし β は $X^3 - 2X - 5$ の根, $K = \mathbb{Q}$

(う) $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$