代数II　小テスト　2018–10–31

答えと簡単な解説

[問 1]　以下の文のそれぞれについて，正しいものには ○ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ．ただし L/K は体の拡大で，$\alpha \in L$ である．

(○) $\alpha \in K$ ならば，α の K 上の最小多項式は $X - \alpha$ である．
【解説】　定義より明らか．

(○) $f(X)$ が $f(\alpha) = 0$ をみたす零でない K 上の多項式ならば，一般に，$[K(\alpha) : K] \leq \deg f$ が成り立つ．
【解説】　$n = \deg f$ とすると，n 個の元 $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ が，K 上 $K(\alpha)$ を生成するから，K 上のベクトル空間 $K(\alpha)$ の次元は n 以下．

(○) $\alpha \neq 0$ であって，α が K 上代数的ならば，$\dfrac{1}{\alpha} = g(\alpha)$ をみたす K 上の多項式 $g(X)$ が存在する．
【解説】　α が K 上代数的であることから，$K(\alpha) = K[\alpha]$ が成り立ち，このことから明らか．または，次のようにしてもよい．

$$f(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0$$

を α の K 上の最小多項式とすると，$f(\alpha) = 0$ より

$$\frac{c_0}{\alpha} = -(\alpha^{n-1} + c_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + c_1).$$

そこで，$g(X) = -c_0^{-1}(X^{n-1} + c_{n-1}X^{n-2} + \cdots + c_1)$ とおけばよい．

(○) $\alpha \notin K$ かつ $[L : K]$ が素数ならば，$L = K(\alpha)$ である．
【解説】　素数次拡大 L/K の中間体は K, L のどちらかに一致するが，$\alpha \notin K$ より $K(\alpha) \neq K$，したがって $K(\alpha) = L$．

(○) $\alpha \in K(\alpha^2)$ ならば，α は K 上代数的である．
【解説】　仮定より $\alpha = g(\alpha^2)/h(\alpha^2)$ となる K 上の多項式 $g(X), h(X)$ が存在する．このとき，$f(X) = g(X^2) - Xh(X^2)$ とおけば $f(\alpha) = 0$ である．ここで，$g(X^2)$ の次数は偶数，かつ $Xh(X^2)$ の次数は奇数だから，$f(X)$ は零多項式ではないことに注意．

(×) α が K 上超越的ならば，ある自然数 n について $K(\alpha^n) = K(\alpha)$ が成り立つ．
【解説】　結論が正しいとすると，$\alpha \in K(\alpha^n)$ となる自然数 n がとれるが，このとき前問と同様にして α が K 上代数的であることが導かれ，仮定に反する．

(×) α の K 上の最小多項式の次数を d とすると，α^2 の K 上の最小多項式の次数は $2d$ である．

【解説】 $K(\alpha)/K$ の次数は α の K 上の最小多項式の次数に等しい，すなわち $[K(\alpha):K]=d$．一方，$\alpha^2 \in K(\alpha)$ より，$K \subset K(\alpha^2) \subset K(\alpha)$ だから，$\underline{\alpha^2 \text{ の } K \text{ 上の最小多項式の次数}} = [K(\alpha^2):K] \leq [K(\alpha):K] = d < 2d$．

[問 2] 以下の α と K について，α の K 上の最小多項式を求めよ．

間違えた、ごめん、修正してね❤

(あ) $\alpha = \sqrt[4]{3} - 1,\quad K = \mathbb{Q}$

【解説】 $(\alpha+1)^4 - 3 = 0$ を展開して $\boxed{X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X - 2}$ を得る． なお，$\mathbb{Q}$ 上の既約性は，アイゼンシュタインの定理を使えばよい．

(い) $\alpha = \dfrac{1}{\beta}$，ただし β は $X^3 - 2X - 5$ の根，$\quad K = \mathbb{Q}$

【解説】 $\beta^3 - 2\beta - 5 = 0$ を β^3 で割ると，$1 - 2\alpha^2 - 5\alpha^3 = 0$． さらに $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}] = 3$ に注意して，$\boxed{X^3 + \dfrac{2}{5}X^2 - \dfrac{1}{5}}$．

(う) $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5},\quad K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

【解説】 $\alpha - \sqrt{3} = \sqrt{5}$ の両辺を平方して，$\alpha^2 - 2\sqrt{3}\alpha + 3 = 5$ となる． よって，$f(X) = X^2 - 2\sqrt{3}X - 2$ とおけば，α は $f(X)$ の根であり，

$$[K(\alpha):K] \leq \deg f(X) = 2.$$

一方，$\sqrt{5} \notin K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ より $K \subsetneq K(\alpha)$，したがって $[K(\alpha):K] \geq 2$ だから，上と合わせて $[K(\alpha):K] = 2$． よって，$\boxed{f(X)}$ が求める最小多項式である．