代数 II　小テスト　2018–11–07

答えと簡単な解説

[問 1] 以下の文のそれぞれについて，正しいものには ◯ を，正しくないものには × をカッコ内に記せ.

(◯) $\sqrt{5}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ 上代数的である.
【解説】　$\sqrt{5}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的なので，$\mathbb{Q}$ の任意の拡大体上で代数的.

(◯) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{4}} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{5}}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である.
【解説】　$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}$ はどれも $\mathbb{Q}$ 上代数的なので，それらの逆数の有限和も $\mathbb{Q}$ 上代数的.

(×) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的である.
【解説】　この和は無限大に発散する.

(◯) 1 のべき根全体の集合を W とする; $W = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } z^n = 1 \,\}$. このとき，$\mathbb{Q}(W)/\mathbb{Q}$ は代数拡大である.
【解説】　W の任意の元は $\mathbb{Q}$ 上代数的なので，$\mathbb{Q}(W)$ も $\mathbb{Q}$ 上代数的.

(×) 複素数平面上の単位円を S とする; $S = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$.（前問の W は S の部分集合であることに注意） $\alpha \in S$ かつ $\alpha \notin W$ ならば，つねに α は $\mathbb{Q}$ 上超越的である.
【解説】　$\alpha = \dfrac{3+4\sqrt{-1}}{5}$ とおくと，α は $\mathbb{Q}$ 上代数的．ここで，$|\alpha| = 1$ より $\alpha \in S$．一方，$(5\alpha)^n = a_n + b_n\sqrt{-1}$　$(a_n, b_n \in \mathbb{R})$ とすると，数学的帰納法により，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して a_n, b_n は

$$a_n \equiv 3, \quad b_n \equiv 4 \pmod 5$$

をみたす整数であることが確かめられる（こんなの気が付かねえよ，というご意見はさておいて…）．とくに $b_n \neq 0$ より $\alpha^n \notin \mathbb{R}$，よって $\alpha^n = 1$ とはなり得ないから $\alpha \notin W$.

(×) 実数体 $\mathbb{R}$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の代数拡大体である.
【解説】　$\pi \in \mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 上超越的.

(×) 複素数体 $\mathbb{C}$ は実数体 $\mathbb{R}$ 上の超越拡大体である．
【解説】 $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\sqrt{-1})$ かつ，$\sqrt{-1}$ は $\mathbb{R}$ 上代数的なので，$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ は代数拡大．

(×) L/K が超越拡大で M が K と異なる中間体ならば，M/K はつねに超越拡大である．
【解説】 $\mathbb{Q}(\pi, \sqrt{2})/\mathbb{Q}$ は超越拡大であり，$\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ は代数拡大．

(×) L/K が超越拡大で M が L と異なる中間体ならば，L/M はつねに超越拡大である．
【解説】 $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}$ は超越拡大であり，$\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}(\pi^2)$ は代数拡大．

(×) L/K が無限次拡大ならば，L/K は超越拡大である．
【解説】 $A = \left\{ \sqrt[n]{3} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ とおくと，$\mathbb{Q}(A)$ は無限次代数拡大．